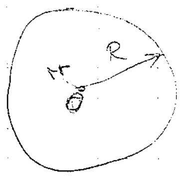
mocchi @ df
050 2214862
primo piano in fondo a dx

Pisa 3 Ottobre 2007 ~mocchi/didattica BI ES 

Problemi:

19/09/2003 Esplosioni Coulombiane:

N particelle di massa m e carica q




$$n = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad Q_0 = qN$$

Trovare $E(r)$

$$\rho_0 = q n$$

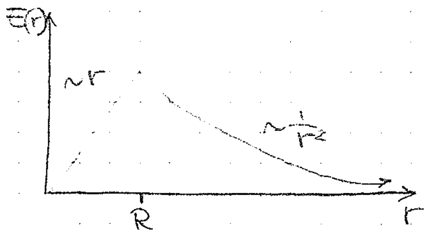
Usando Gauss

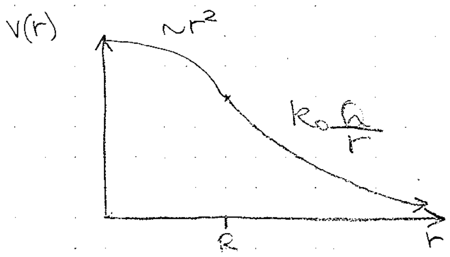
Per la simmetria del sistema il campo elettrico $\vec{E}$ deve essere radiale centrato nel centro della sfera

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \Phi(\vec{E}) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{1}{\varepsilon_0} & (\forall r < R) \\ Q_0 \frac{1}{\varepsilon_0} & (\forall r > R) \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = k_0 \frac{Q_0 r}{R^3} & (\forall r < R) \\ \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k_0 \frac{Q_0}{r^2} & (\forall r \geq R) \end{cases}$$




Trovare il Potenziale:

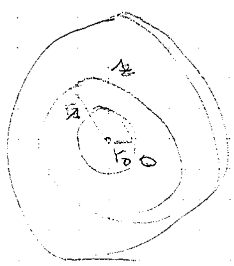
$$E = -\frac{dV}{dr}(r)$$

$$V(r) = \frac{k_0 Q_0}{r} \qquad (\forall r \geq R)$$

$$V(r) = -\frac{k_0 Q_0}{R^3}\frac{r^2}{2} + c \qquad (\forall r < R)$$

$$+\frac{3}{2}\frac{k_0 Q_0}{R}$$ per raccordare in R il potenziale

Le cariche sono concordi, quindi tenderanno a repellersi, mantenendo la simmetria sferica.




Le particelle non si scavalcano perché la funzione $E(r)$ é crescente, per cui le particelle più esterne sono soggette a una forza maggiore.

$r_0 = \rho(0)$ Il raggio di una certa popolazione di particelle é funzione del tempo

$\rho(t)$

Il campo sarà allora istante per istante funzione del raggio e del tempo

$$E = E(\rho(t), t)$$

$$4\pi \rho^2(t)\, E(\rho(t), t) = \frac{q\,\eta_0}{\varepsilon_0} \frac{4}{3}\pi[\rho(0)]^3 = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r_0}{R}\right)^3$$

Riscrivendo

$$\cancel{Q_0/\left(\frac{r_0}{R}\right)^3} \begin{cases} E(\rho, t) = k \cdot \frac{Q_0}{\rho^2}\left(\frac{r_0}{R}\right)^3 \\ \rho = \rho(t) \end{cases}$$

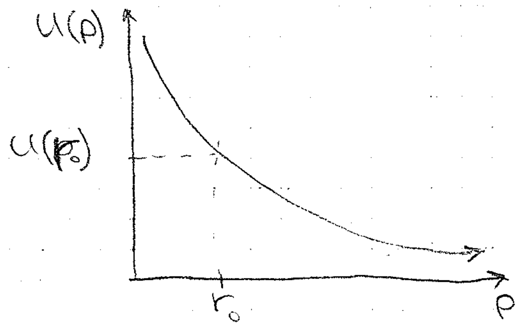
Posso ora scrivere l'equazione del moto

$$\begin{cases} m\,\frac{d^2\rho}{dt^2} = q\,E(\rho, t) = k_0 \left(\frac{r_0}{R}\right)^3 \frac{Q_0 q}{\rho^2} = F(\rho) \\ \rho(0) = r_0 \qquad \dot\rho(0) = 0 \end{cases}$$

Quanta energia cinetica acquisiscono le particelle

$$F(\rho) = -\frac{dU}{d\rho}(\rho)$$

$$U(\rho) = \frac{k_0\, q\, Q}{\rho}\left(\frac{r_0}{R}\right)^3$$

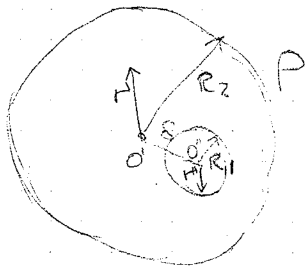



$k_0\, q Q_0 \frac{r_0^2}{R^3}$ ha un max a $r = R$

Dimostrare che $\eta(t)$ (densità in funzione del tempo) rimane uniforme.

Provare a rifare il problema per un piano carico e per un cilindro infinito carico

Calcolare il campo elettrico di una sfera uniformemente carica con un buco dentro



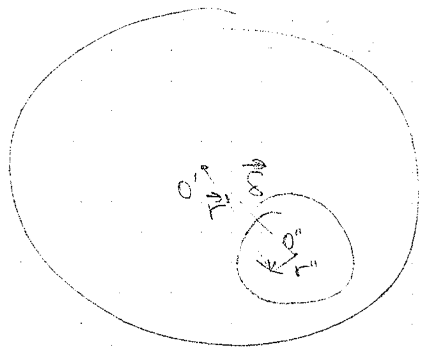

Si può calcolare il campo della sfera grande ($\vec{E}'$) e sottrarre il campo della sfera piccola ($\vec{E}''$)

$$\vec{E}' = \begin{cases} \dfrac{\rho \vec{r}'}{3\varepsilon_0} & |r| < R_2 \\[2ex] \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{4\pi R_2^3}{3}\right)\dfrac{\vec{r}'}{r^3} & |R| \geq R_2 \end{cases}$$

$$\vec{E}'' = \begin{cases} \dfrac{\rho \vec{r}''}{3\varepsilon_0} & |r| < R_1 \\[2ex] \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{4\pi R_1^3}{3}\right)\dfrac{\vec{r}''}{r^3} & |r| \geq R_1 \end{cases}$$

$$\vec{E} = \vec{E}' - \vec{E}''$$

Campo elettrico dentro il buco




$$\vec{E}'(\vec{r}) = \frac{\rho \vec{r}'}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho \vec{r}''}{3\varepsilon_0} =$$

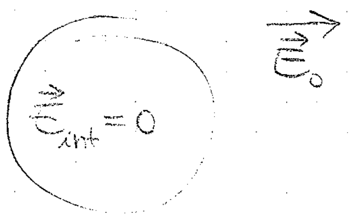
$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\underline{\vec{r}' - \vec{r}''}\right)$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{\delta}$$

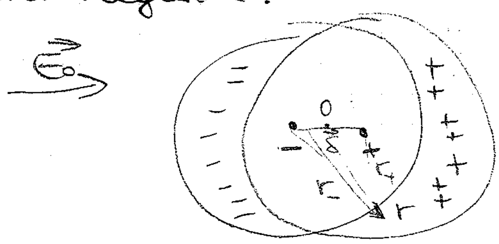
Cioé il campo all'interno del buco é uniforme diretto lungo la congiungente dei centri.

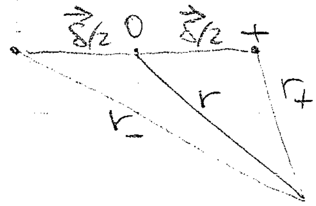
---

Un metallo immerso in un campo elettrico subirà delle migrazioni di carica fino a giungere a una nuova posizione di equilibrio ($\vec{E}_{interno} = 0$)



Immaginiamo la palla di metallo come due palle rigide una di cariche positive e l'altra di cariche negative.



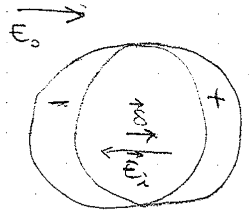




$$\vec{E}_{es} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$
$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_+ - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_-$$
$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\vec{r} - \frac{\vec{\delta}}{2} - \left(\vec{r} + \frac{\vec{\delta}}{2}\right)\right)$$
$$= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{\delta}$$

$$\vec{E}_{int} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{es}$$
$$= \vec{E}_0 - \frac{\rho\vec{\delta}}{3\varepsilon_0} = 0$$

$$\vec{\delta} = \frac{3\vec{E}_0\varepsilon_0}{\rho}$$

All'esterno della sfera si avrà la somma di $\vec{E}_0$ più il campo di un dipolo



Nell'area di sovrapposizione si ha

$$\vec{E}_{int} = -\rho \frac{\vec{\delta}}{3\varepsilon_0}$$

Le cariche devono stare ferme

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{int} = E_0 - \frac{\rho\vec{\delta}}{3\varepsilon_0} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\delta} = \frac{3\varepsilon_0 E_0}{\rho}$$

Mettiamo la sfera di metallo in un campo $E_0$.

$E_0 = 10^5 \, V m^{-1}$

$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$

$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C

$\rho_m = 10^3 - 10^4 \, kg \, m^{-3}$

$\rho_{Al} = 2.6 \times 10^3 \, kg \, m^{-3}$ $\quad Z_{Al} = 13 \quad A = 26$

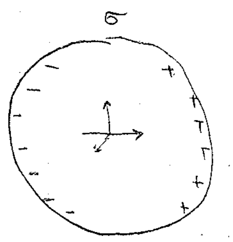
$N_A = 6 \times 10^{23}$

In $1 \, m^3$

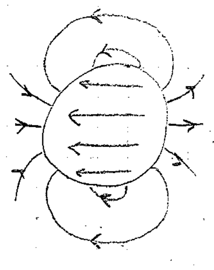
$6 \times 10^{28}$ atomi$/m^3 \Rightarrow \sim 10^{29}$ el$/m^3$

$\rho_c \simeq 10^{10} \, C/m^3$

$$\delta \simeq \frac{\varepsilon_0 E_0}{\rho} \approx \frac{10^{-11} \; 10^5}{10^{10}} = 10^{-16} \, m$$



$$\sigma = \sigma(\theta)$$



$$\vec{E}_{ext} = \vec{E}(r, \theta)$$

$$= \frac{k_0}{r^3}\left[3\hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{p}) - \vec{p}\right]$$

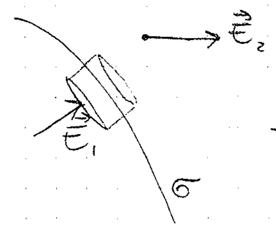
$$E_r = \vec{E}_{ext}\cdot\hat{r} = \frac{k_0}{r^3}\left[3\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1}(\hat{r}\cdot\vec{p}) - \vec{p}\cdot\hat{r}\right]$$

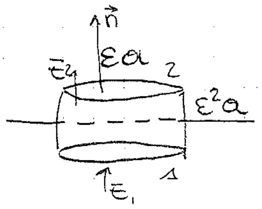
$$= \frac{k_0}{r^3} 2\hat{r}\cdot\vec{p} = \frac{2k_0}{r^3} p \cos\theta$$

$$E_\theta = \vec{E}_{ext}\cdot\hat{\theta} = \frac{k_0}{r^3}\left[3\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{\theta}}_{=0}(\hat{r}\cdot\vec{p}) - \vec{p}\cdot\hat{\theta}\right]$$

$$= -\frac{k_0}{r^3}\vec{p}\cdot\hat{\theta} = \frac{k_0}{r^3} p \sin\theta$$

Condizioni di [dis]continuità



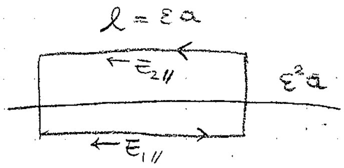




Mi preoccupo del flusso sulle basi del cilindretto

$$\Phi_v(\vec{E}) = \left(\vec{E}_2 \cdot \hat{n} - \vec{E}_1 \cdot \hat{n}\right) \Delta S$$

$$= \left(E_{2\perp} - E_{1\perp}\right) \Delta S \underset{\text{per Gauss}}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \Delta S$$

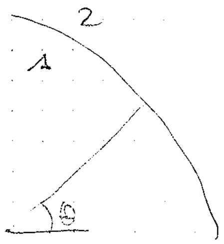
$$\boxed{E_{2\perp} - E_{1\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$




$$\oint E \cdot d\vec{l} = E_{2//}\, l - E_{1//}\, l$$

$$= \left(E_{2//} - E_{1//}\right) l = 0 \quad \text{(Teor. di Stokes)}$$

$$\boxed{E_{2//} - E_{1//} = 0}$$




$\sigma(\theta)$

$$E_{2\perp} = \frac{2 k_0 p \cos\theta}{R^3}$$

$$E_{1\perp} = \vec{E}_{int} \cdot \hat{r} = E_{int} \cos\theta$$

$$= -\frac{\rho \delta}{3\varepsilon_0} \cos\theta$$

$$\sigma = \varepsilon_0 \left(E_{2\perp} - E_{1\perp}\right)$$

$$= \varepsilon_0 \left( \frac{2k_0}{R^3} \underbrace{\frac{4\pi R^3}{3}}_{Q} \delta + \frac{\rho\delta}{3\varepsilon_0} \right) \cos\theta \qquad k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$= \rho \delta \cos\theta$$

Spegnendo $E_0$ si ha che le cariche oscillano attorno alla posizione di equilibrio

$$m_e \ddot{\vec{\delta}}_e = -e \vec{E}_{int} = -e \left( + \frac{\rho \vec{\delta}_e}{3\varepsilon_0} \right) = -\frac{e\rho \vec{\delta}_e}{3\varepsilon_0} = -\underbrace{\frac{e\rho}{3\varepsilon_0}}_{K} \vec{\delta}_e \quad \text{oscillatore armonico}$$

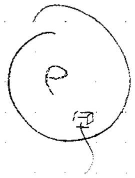
$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{n_e}{3\varepsilon_0 m_e}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}} = \text{frequenza di plasma}$$

con $n_e$ = densità di elettroni

Queste sono le oscillazioni di Mie

rifare esercizio per lastra infinita

Una distribuzione di carica ha un'energia interna.

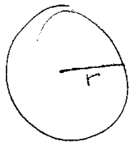



$\rho(\vec{x})\ ,\ V(\vec{x})$

$dQ = \rho\, dV$

$U = V dQ \overset{?}{=} V\rho\, dV$ NO

$U_{tot} \overset{?}{=} \int V \rho\, dV$ NO




$q(r) = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$

$4\pi r^2 E = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}$

$E = \frac{q(r)}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$

$V = \frac{E}{q} = \frac{\rho 4\pi r^3}{q\, 3\varepsilon_0 \cancel{4\pi r^2}}$

$dU = V dq = k_0 \frac{q(r)}{r} dq \qquad dq = \rho 4\pi r^2 dr$

$= \frac{k_0}{r} \rho \frac{4\pi r^3}{3} \rho 4\pi r^2 dr$

$= \frac{k_0}{3} (4\pi\rho)^2 r^4 dr$

$$U = \int_0^R \frac{k_0}{3} (4\pi\rho)^2 r^4 dr$$

$$= \frac{k_0}{3} \frac{r^5}{5} (4\pi\rho)^2 \qquad Q = \rho \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$U = \frac{3}{5} k_0 \frac{Q^2}{R}$$

$$V(r) = k_0 Q \left(\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3}\right) \quad \forall r < R$$

Vedo che la prima formula è sbagliata

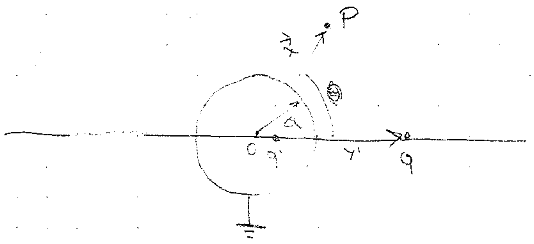
$$U \overset{?}{=} \int V\rho\, dV = k_0 Q \rho \int_0^R \left(\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3}\right) 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{k_0 Q^2\, 4\pi}{\frac{4\pi}{3} R^3} \left(\frac{3}{2R}\frac{R^3}{3} - \frac{1}{2R^3}\frac{R^5}{5}\right)$$

$$= \frac{6}{5} k_0 \frac{Q^2}{R}$$

Pisa 17 Ottobre 2007 Francesco Cecherini (studio 46) FSI ES
cecherini@df.unipi.it
050-2214845

Cariche immagine:



Il campo all'interno della sfera deve essere nullo, perciò la carica si deve ridistribuire in modo da contrastare il campo generato da q.

Il potenziale sulla superficie deve essere costante.

$$V(a) = 0$$

perché la sfera è a terra.

Sia $\vec{y} = \vec{Oq}$ e $\vec{x} = \vec{OP}$

L'immagine sarà $(q', \vec{y}')$

$$V(\vec{x}) = k\left[\frac{q}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \frac{q'}{|\vec{x}-\vec{y}'|}\right] \qquad \hat{n} = \frac{\vec{x}}{|x|} \qquad n' = \frac{\vec{y}}{|y|}$$

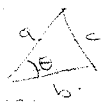
$$\hat{n}\cdot\hat{n}' = \cos\theta$$

$$V(a) = k\frac{q}{|a\hat{n}-y\hat{n}'|} + \frac{k\,q'}{|a\hat{n}-y'\hat{n}'|} \overset{?}{=} 0$$

$$= k\left[\frac{q}{a|\hat{n}-\frac{y}{a}\hat{n}'|} + \frac{q'}{y'|\frac{a}{y'}\hat{n}-\hat{n}'|}\right] \overset{?}{=} 0$$

$$\begin{cases} \frac{q}{a} = \frac{q'}{y'} \\ |\hat{n}-\frac{y}{a}\hat{n}'| = |\frac{a}{y'}\hat{n}-\hat{n}'| \end{cases}$$

Condizioni perché sia vera l'equazione del potenziale



Legge dei coseni

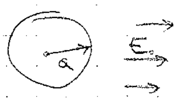
$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\theta$

$$\left(1+\frac{y^2}{a^2}-\frac{2y}{a}\cos\theta\right)^2 = \frac{a^2}{y'^2}+1-\frac{2a}{y'}\cos\theta$$

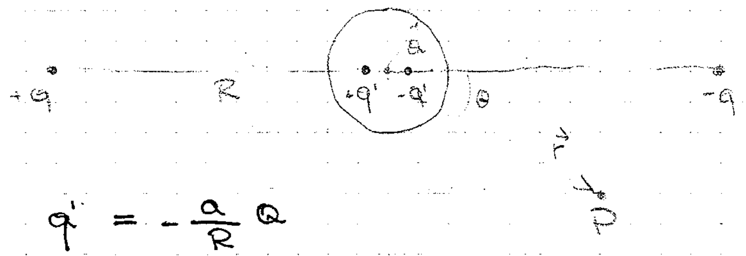
$$\begin{cases} q' = -\frac{a}{y}q \\ y' = \frac{a^2}{y} \end{cases}$$

Se la sfera non è più a terra, la carica ~~total~~ è nulla, quindi anche il flusso totale sulla superficie.
Da qualche parte devo mettere un $-q'$ per bilanciare la carica. $-q'$ deve stare al centro in modo che la superficie della sfera sia sempre equipotenziale.
Sarà inoltre

Sfera in un campo elettrico uniforme:




Schematizzo considerando due cariche di segno opposto a distanza $2R \gg a$




$$R' = \frac{a^2}{R} \qquad q' = -\frac{a}{R}Q$$

Le due cariche genereranno due cariche immagine

Il potenziale in un generico punto P

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{(r^2+R^2+2rR\cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{1/2}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-\frac{a}{R}Q}{\left(r^2+\frac{a^4}{R^2}+2r\frac{a^2}{R}\cos\theta\right)^{1/2}} - \frac{\frac{a}{R}Q}{\left(r^2+\frac{a^4}{R^2}-2r\frac{a^2}{R}\cos\theta\right)^{1/2}}\right]$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{R\left(1+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2r}{R}\cos\theta\right)^{1/2}} - \frac{Q}{R\left(1+\frac{r^2}{R^2}-\frac{2r}{R}\cos\theta\right)^{1/2}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{aQ}{rR\left(1+\frac{a^4}{R^2r^2}+\frac{2a^2}{Rr}\cos\theta\right)^{1/2}} - \frac{aQ}{Rr\left(1+\frac{a^4}{R^2r^2}-\frac{2a^2}{Rr}\cos\theta\right)^{1/2}}\right]$$

Sviluppiamo e viene

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{R}\left(\cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}} - \frac{1}{2}\frac{2r}{R}\cos\theta - \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}} - \frac{1}{2}\frac{2r}{R}\cos\theta\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{aQ}{rR}\left(+\frac{2a^2}{rR}\cos\theta\right)\right]$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{Q}{R}\frac{2r}{R}\cos\theta + \frac{aQ}{rR}\frac{2a^2}{rR}\cos\theta)\right]$$

Sia $E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$

$$V = \frac{2E_0 a^3}{r^2}\cos\theta - 2E_0 r\cos\theta$$

$$= E_0\left(\underbrace{\frac{2a^3}{r^2}}_{\text{contributo immagine}} - \underbrace{2r}_{\text{contributo dell'uniforme}}\right)\cos\theta$$

calcolare $\vec{p}(E)$

Calcolare $\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r}\Big|_a = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$

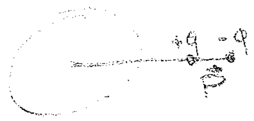
Pisa 23 Ottobre 2007

BI
ES

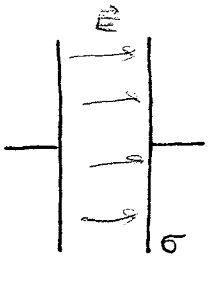
Conduttori:

~~Dipolo~~ davanti a un conduttore


le cariche sono alla stessa distanza dal centro della sfera




Qui le cariche non sono alla stessa distanza, quindi il dipolo immagine non basta, ci vuole una forza carica...




Qual'é la forza su una lastra?

$$\vec{F} = q\vec{E} = \int_{V} \rho \vec{E}\, dV \qquad V = \text{volume}$$

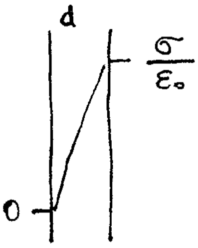
$$P = \frac{F}{S} \qquad \text{pressione}$$

$$P = \frac{F}{S} = \frac{q\vec{E}}{S}$$

E in un condensatore é

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\cancel{S}\sigma}{\cancel{S}}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}$$ errato!




armatura destra

$$\rho = \frac{\sigma}{d}$$

$$F = \int \rho E\, dV =$$

$$= \int \frac{\sigma}{d} E\, dV$$

$$E(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{x}{d}\right)$$

$$= \int \frac{\sigma}{d}\frac{\sigma x}{\varepsilon_0 d}\, dV \qquad dV = S\,dx$$

$$= \int_0^d \frac{\sigma^2 x}{\varepsilon_0 d^2} S\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0 \cancel{d^2}}\cancel{d^2} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}$$

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

Altro metodo

① | ②

$$E_i = E_{ext} + E_{sep} = E_{ext} \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$E_1 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + E_{ext} \qquad E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + E_{ext}$$

$$F = \sigma S E_{ext} \qquad E_{ext} = \frac{E_1 + E_2}{2}$$

BI
ES

$$F = \sigma S E_{ext} = \sigma S \left(\frac{E_1+E_2}{2}\right)$$

$$\cancel{S(E_2-E_1)}$$

$$p = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_2^2 - E_1^2\right) = \Delta u \qquad u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Dall'energia

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

U del condensatore

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}} \qquad V_{potenziale} = Eh$$

↳ distanza armature

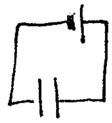
$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2 h}{\varepsilon_0 S}$$

a Q costante

$$F = -\frac{dU}{dh} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S} = -\frac{1}{2}\frac{S Q^2}{\varepsilon_0 S^2} = -\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} S$$

$$C = \frac{Q}{V} \qquad Q = CV$$

a V costante



$$F = -\frac{1}{2}\frac{C^2V^2}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{2} CV^2 = +\frac{1}{2} V^2 \frac{\varepsilon_0 S}{h}$$

$$= \frac{1}{2} V^2 \frac{\varepsilon_0 S}{h^2}$$

il segno è sbagliato

bisogna scrivere la variazione di energia totale.

$$F = -\frac{\partial U_{tot}}{\partial h} = -\left(\frac{\partial U_{cond}}{\partial h} + \frac{\partial U_{pila}}{\partial h}\right)$$

$$dU_{pila} = -dW = -V dQ = -V d(CV) = -V^2 dC$$

$$dU_{cond} = \frac{1}{2} V^2 dC$$

$$dU_{tot} = -\frac{1}{2} V^2 dC \qquad dC = \varepsilon_0 S \, d\left(\frac{1}{h}\right) = -\frac{\varepsilon_0 S}{h^2} dh$$

$$F = -\frac{dU_{tot}}{dh} = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{h^2}$$

Sferette raggio $a$, N sfere

dipolo di una sferetta?

$\vec{E}$

$\cdot \quad \overset{r}{\longrightarrow} \quad +q' \; -q' \quad \cdot$

$$\frac{q}{r^2} = 2\pi\varepsilon_0 E$$

$$q' = \frac{qa}{r} \qquad p = \frac{qa}{r}\,\frac{2a^2}{r} = \frac{2qa^3}{r^2}$$

$$r' = \frac{a^2}{r}$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 E a^3$$

$$= 3\left(\frac{4\pi}{3}a^3\right)\varepsilon_0 E = 3V_{vol}\varepsilon_0 E$$

$$p = 3\varepsilon_0 V_{vol} E$$

$\chi$ del dielettrico

$$\vec{P}_{polar.} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \vec{p}n$$

$$\cancel{\varepsilon_0}\chi\cancel{\vec{E}} = \vec{p}n = 3\cancel{\varepsilon_0}Vn\cancel{E}$$

$$\chi = 3V_{vol}n = 3\cancel{n}f \qquad f = nV = \frac{\text{volume sferette}}{\text{volume unitario}}$$

condizioni su $n$ e $a$ affinché sia trascurabile il contributo delle sferette al campo.

$$\vec{E}d = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{l^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\varepsilon_0 VE}{l^3} \qquad l = \text{distanza media}$$

$$l = n^{-1/3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\cancel{\varepsilon_0}}3\cancel{\varepsilon_0}VEn$$

Voglio

$$Ed \ll E \quad \Leftrightarrow \quad Vn \ll 1$$

$$\frac{1}{4\pi}3VEn \ll E$$

$$\cancel{E}\left(\frac{3Vn}{4\pi}\right) \ll \cancel{E}$$

$$\Rightarrow Vn \ll 1 \qquad V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$\frac{\cancel{3}}{\cancel{4\pi}}\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cancel{\pi}a^3 n < 1$$

Pisa 31 Ottobre 2007

Dielettrici:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_{lib} + \rho_{pol}\right)$$

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot(\varepsilon_0\vec{E}) = \rho_{lib} - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\underbrace{\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)}_{\equiv\vec{D}} = \rho_{lib}$$

Se $\vec{P} = \chi\vec{E}$

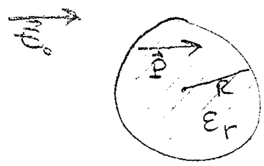
$$\vec{D} \stackrel{def}{=} \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} = \varepsilon_0(\underbrace{1+\chi}_{\varepsilon_r})\vec{E} = \underbrace{\varepsilon}_{\varepsilon_0\varepsilon_r}\vec{E}$$

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{lib}\\ \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0\end{cases}$$


$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0 \Rightarrow E_{2\parallel} = E_{1\parallel} \quad e \quad D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_{lib}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{2\perp} - E_{1\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Problema:




Il campo totale ~~sarà~~ dato da $E_0$ più il campo dato dalla polarizzazione.

$$\begin{cases}\vec{E}_{pol} = -\dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} & r<R\\ \vec{E}_{pol} = \text{campo di dipolo con } \vec{p} = \underset{volume}{V}\vec{P} & r>R\end{cases}$$

$$\vec{E}_{in} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{pol} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \qquad \text{ma } \vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}_{locale}$$

$$e \ \vec{E}_{locale} = \vec{E}_{in}$$

$$\vec{E}_{in} = \vec{E}_0 - \frac{\chi}{3\cancel{\varepsilon_0}}\cancel{\varepsilon_0}\vec{E}_{in}$$

$$E_{in} = \vec{E}_0\frac{1}{1+\frac{\chi}{3}} = \frac{3E_0}{3+\chi} = \frac{3\vec{E}_0}{2+\varepsilon_r}$$

Per $r > R$

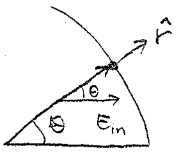
campo di dipolo

$$\vec{E}_{out} = \vec{E}_0 + \frac{k_0}{r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\right]$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \underset{\varepsilon_r - 1}{\underset{\downarrow}{\chi}} \vec{E}_{in} = 3\varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r - 2}\right)\vec{E}_0$$

$$\vec{p} = \frac{4\pi}{3}R^3 \cdot \vec{P}$$

Verifichiamo le condizioni di contorno



$$\underset{D(R^-)}{\underset{\parallel}{\varepsilon E_r(R^-)}} = \varepsilon_0 E_r(R^+)$$

$$\begin{cases} \varepsilon E_r(R^-) = \varepsilon E_{in}\cos\theta \\ \varepsilon_0 E_r(R^+) = \varepsilon_0 E_0 \cos\theta + \frac{2p}{4\pi\cancel{\varepsilon_0}R^3}\cos\theta \;\cancel{\varepsilon_0} \end{cases}$$

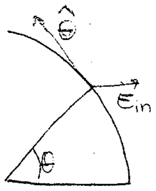
$$\varepsilon E_{in} = \left(\varepsilon_0 E_0 + \frac{2p}{4\pi R^3}\right)\cos\theta$$

$$\parallel$$

$$\frac{3\varepsilon_0 E_0}{2+\varepsilon_r} = \left(\varepsilon_0 E_0 + \frac{2}{\cancel{4\pi}}\frac{\cancel{4\pi R^3}}{\cancel{3}}\frac{1}{\cancel{R^3}}\cancel{3}\varepsilon_0\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}E_0\right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E_0(\cancel{\varepsilon_r + 2}) + 2\varepsilon_0 E_0(\varepsilon_r - \cancel{1})}{\varepsilon_r + 2}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E_0 (3\varepsilon_r)}{\varepsilon_r + 2} = \frac{3\varepsilon E_0}{\varepsilon_r + 2}$$



$$E_{\parallel}(R^-) = -E_{in}\sin\theta$$

$$E_{\parallel}(R^+) = -E_0 \sin\theta + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{R^3}$$

$$-E_{in} = -E_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{R^3}$$

$$-\frac{3E_0}{\varepsilon_r + 2} = -E_0\left(1 - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right) = -E_0\frac{3}{\varepsilon_r + 2}$$

Verificato.

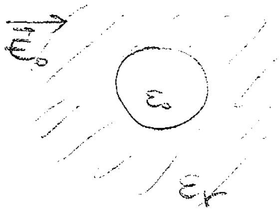
Modo Formale senza ipotizzare che $\vec{P}$ è costante e uniforme.

$$E = \begin{cases} E_c & (r<R) \\ \vec{E}_0 + \dfrac{3\hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{P}_c) - \vec{P}_c}{r^3} & (r>R) \end{cases} \qquad (*)$$

Andando a imporre le condizioni di verifica si ottengono due eq. in due incognite $E_c$ e $\vec{P}_c$.

$$\begin{cases} \varepsilon E_r(R^-) = \varepsilon_0 E_r(R^+) \\ E_\theta(R^-) = E_\theta(R^+) \end{cases}$$

Problema




Il campo dovrebbe essere della forma $(*)$

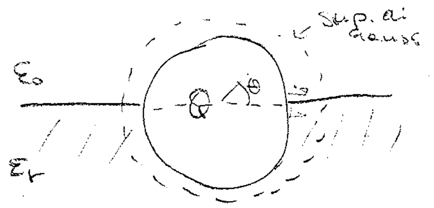
Imponiamo le condizioni al contorno

$$\begin{cases} \varepsilon_0 E_r(R^-) = \varepsilon E_r(R^+) \\ E_\theta(R^-) = E_\theta(R^+) \end{cases}$$

L'unica cosa che cambia dal problema precedente è che $\varepsilon \to \varepsilon_0$ e viceversa

$$\Rightarrow E_c = \frac{3E_0}{2+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} > E_0$$

(02/02/04) capita spesso all'orale




Vogliamo trovare il campo e la forza elettrostatica sulla sfera

Ipotizziamo il campo radiale $E = E_r(r,\theta)$

$D = D_r(r,\theta)$

Visto che la componente tangenziale deve essere continua supponiamo anche che non ci sia dipendenza da $\theta$

$$E_r(r,\theta^-) = E_r(r,\theta^+ = 0^+)$$

$$D = \varepsilon E = \begin{cases} \varepsilon_0 E & \text{sopra} \\ \varepsilon E & \text{sotto} \end{cases}$$

$$\Phi(\vec{D}) = Q$$

$$= 2\pi R^2 \varepsilon_0 E + 2\pi R^2 \varepsilon E$$

$$= 2\pi r^2 E(\varepsilon_0 + \varepsilon) = Q$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{Q}{2\pi r^2(\varepsilon_0+\varepsilon)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\sigma_{tot}}{\varepsilon_0} = E(R^+) - \cancel{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{E(R^-)}}} = \frac{1}{\varepsilon_0+\varepsilon}\,\frac{Q}{2\pi R^2}$$

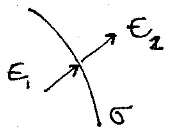
$$\sigma_{tot} = \sigma_{lib} + \sigma_{pol}$$

$$\Rightarrow \sigma_{tot} = \frac{1}{1+\varepsilon_r}\,\frac{Q}{2\pi R^2}$$

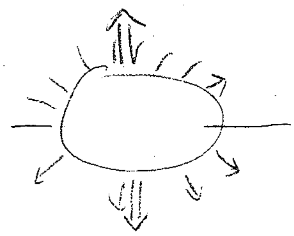
$$\sigma_{lib} = D(R^+) - \cancel{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{D(R^-)}}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon}\,\dfrac{Q}{2\pi R^2} & \text{sopra} \\[2ex] \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\,\dfrac{Q}{2\pi R} & \text{sotto} \end{cases}$$

Pressione elettrostatica



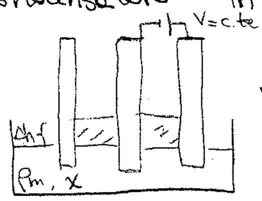

$$P_{ES} = \frac{1}{2}\sigma_{lib}E_s = \frac{1}{2}\sigma_{lib}\,E(R^+)$$



Integrando le pressioni sulle due semisfere si trova che la forza verso il basso è maggiore di quella verso l'alto. Quindi la palla sprofonda.

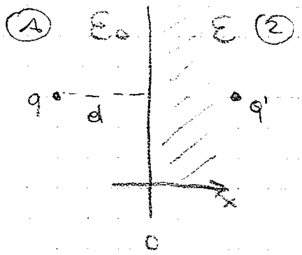
Problema 4.13 Jackson

Condensatore in un liquido dielettrico




$\downarrow g$ Trovare $x = x(h)$

Problema



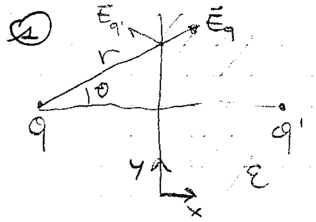

Trovare $E$, $V$, ~~fd~~

In ①

Mettiamo una carica immagine in posizione simmetrica da determinare

In ② vedremmo un'altra carica immagine $q''$ nella posizione di $q$ da determinare.

Usiamo le condizioni al contorno per trovare $q'$ e $q''$




$$E_{xq} = \frac{k_0}{r^2} q \cos\theta \qquad E'_x = -\frac{k_0}{r^2} q' \cos\theta$$

$$E_{yq} = \frac{k_0}{r^2} q \sin\theta \qquad E'_y = \frac{k_0}{r^2} q' \sin\theta$$

$$\Rightarrow E_x(\theta) = \frac{k_0}{r^2} \cos\theta \, (q - q')$$

$$E_y(\theta) = \frac{k_0}{r^2} \sin\theta \, (q + q')$$

Andando a vedere la regione ②

$$E_x = \frac{k_0}{r^2} q'' \cos\theta \qquad E_y = \frac{k_0}{r^2} q'' \sin\theta$$

Imponiamo ora $D_x(0^-) = D_x(0^+)$

$$\varepsilon_0 \cancel{\frac{k_0}{r^2}} \cancel{\cos\theta} (q - q') = \varepsilon \cancel{\frac{k_0}{r^2}} q'' \cancel{\cos\theta}$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 (q - q') = \varepsilon q''$$

$$\cancel{\varepsilon_0} \cancel{\frac{k_0}{r^2}} \cancel{\sin\theta} (q - q') = \cancel{\varepsilon} \cancel{\frac{k_0}{r^2}} q'' \cancel{\sin\theta}$$

$$\rightarrow q - q' = q''$$

Mettendo a sistema

$$\begin{cases} q - q' = \varepsilon_r q'' \\ q + q' = q'' \end{cases}$$

$$q' = \frac{2q}{\varepsilon_r + 1} < q \; ; \; q'' = -\frac{\varepsilon_r + 1}{\varepsilon_r + 1} q$$

Nel limite $\varepsilon_r \to +\infty$ ritroviamo il piano conduttore.

Pisa 21 Novembre 2007

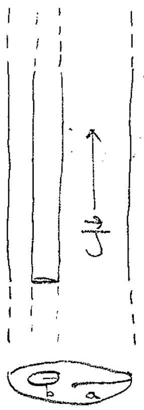
Magnetostatica:

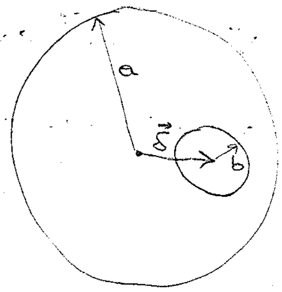
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

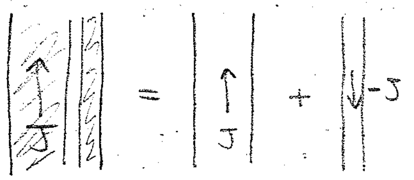
$\vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$

Campo magnetico di un filo infinito di sezione non trascurabile con una cavità all'interno




Usiamo il principio di sovrapposizione




Il campo è concentrico al filo

$$\vec{B} = B(r)\,\hat{\varphi}.$$

Usiamo l'equazione del rotore

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

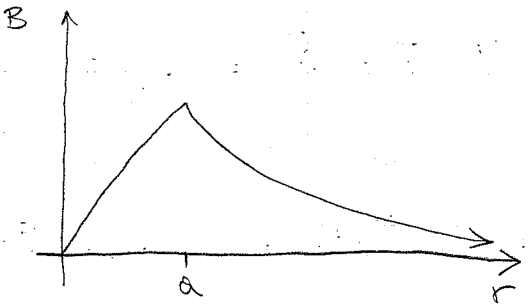
Per $r<a$

$$2\cancel{\pi}\cancel{r}B = \mu_0 J \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 J}{2} r$$

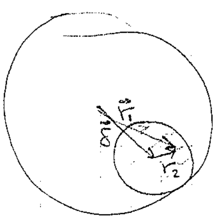
Per $r>a$

$$2\pi r B = \mu_0 J \pi a^2 \equiv I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$




$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{J}}{2} \wedge \vec{r}$$




$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2}(\vec{J} \wedge \vec{r}_1)$$

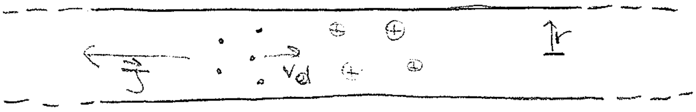
$$B_2 = -\frac{\mu_0}{2}(\vec{J} \wedge \vec{r}_2)$$

Il campo all'interno della cavità è uniforme.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \wedge (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{2}(\vec{J} \wedge \vec{\delta})$$

Possibile domanda d'orale

Effetto "Pinch" (strizzamento)




($\vec{J}$ è il verso della corrente positiva!)

$$\vec{J} = -e\, n_e \vec{v}_d$$

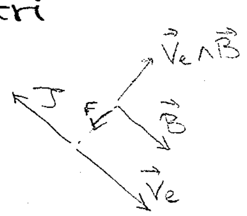
Densità di elettroni per unità di volume $= n_e$

$$q = -e$$

Densità ioni $= Z n_i$

All'interno del filo $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \wedge \vec{r} = -\frac{\mu_0}{2} e\, n_e (\vec{v}_e \wedge \vec{r})$

Ogni elettrone risente del campo magnetico generato da tutti gli altri




$$\vec{F} = -e\, \vec{v}_d \wedge \vec{B}$$
$$= e^2 \frac{\mu_0}{2} n_e \vec{v}_d \wedge (\vec{v}_d \wedge \vec{r})$$
$$= e^2 \frac{\mu_0}{2} n_e v_d^2 \vec{r}$$

La forza tende a tirarsi gli elettroni verso l'asse.

Se gli elettroni collassano verso il centro si crea un campo elettrico che contrasta questo moto. Si arriva all'equilibrio quando

$$\vec{E} + \vec{v}_d \wedge \vec{B} = 0$$

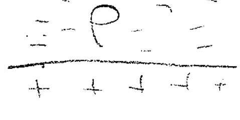
Si modifica allora la $n_e$, che non sarà più uniforme.

$$\vec{E} = \vec{v}_d \wedge \vec{B} = \frac{\vec{F}}{e} = \frac{e\mu_0}{2} n_e v_d^2 \vec{r}$$

Questo campo è dato da una distribuzione uniforme

$$\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \frac{1}{r} \frac{\partial (rE)}{\partial r}$$
$$= -\varepsilon_0 \mu_0 e\, v_d^2\, n_e$$
$$= -\frac{1}{c^2} e\, n_e v_d^2$$
$$= -e n_e \left(\frac{v_d}{c}\right)^2 \qquad = Z e\, n_i - e n_e$$

Lo sbilancio di carica positiva sarà sulla superficie.



$$n_e = \frac{7n_i}{1-\left(\frac{V_d}{c}\right)^2} > 7n_i$$

$V_d \approx 10^{-2}\ ms^{-1}$

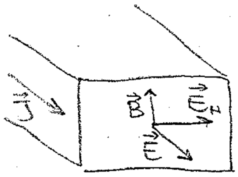
$\left(\frac{V_d}{c}\right)^2 \approx 10^{-21}$

Effetto Hall con <u>due</u> specie di portatori $(+ \ e \ -)$

$$\vec{E}_H = -\vec{v}\wedge\vec{B}$$

| | |
|---|---|
| $+q$ | $-q$ |
| $m_+$ | $m_-$ |
| $\nu_+$ | $\nu_-$ |

$n_+ = n_- = n$




Supponiamo valga il modello di Drude

$$0 = m_\pm \frac{d\vec{v}_\pm}{dt} = \underbrace{\vec{F}_\pm}_{\pm q\vec{E}} - m_\pm \nu_\pm \vec{v}_\pm$$

nello stato stazionario

$\nu_\pm$: coefficiente di attrito viscoso

$$\vec{v}_\pm = \pm \frac{q}{m_\pm \nu_\pm}\vec{E}$$

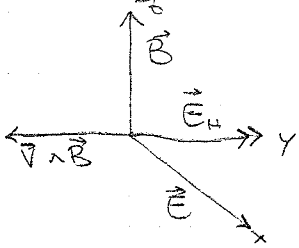
$$\vec{J} = n_+ q_+ \vec{v}_+ + n_- q_- \vec{v}_-$$

$$= nq(\vec{v}_+ - \vec{v}_-) = nq^2\left(\frac{1}{m_+\nu_+} + \frac{1}{m_-\nu_-}\right)\vec{E}$$

Conducibilità $\sigma$

$$\sigma = nq^2\left(\frac{1}{m_+\nu_+} + \frac{1}{m_-\nu_-}\right)$$

Accendiamo un campo magnetico




$$F_{+,y} = q(v_{+,x}B + E_H) = -q(v_{-,x}B + E_H) = F_{-,y} = 0$$

$$\begin{cases} q(v_{+,x} + E_H) = 0 \\ -q(v_{-,x} + E_H) = 0 \end{cases}$$

Esiste una soluzione solo se $v_- = v_+$, non esiste dunque in generale un campo di Hall che sistema le cose.

È condizione necessaria affinché esista un caso stazionario che $\vec{J}_H = 0$

$$\vec{J}_H = m_+ q V_{+y} - n_- q V_{-y}$$

$$= qn(V_{+y} - V_{-y}) \qquad \Rightarrow \qquad V_{+y} = V_{-y}$$

Mettendo dentro nell' eq. del moto

$$\begin{cases} m_- \dfrac{dv_{-y}}{dt} = -q\left(V_{+x}B + E_H\right) - m_-\nu_- V_y = 0 \\[2ex] m_+ \dfrac{dv_{+y}}{dt} = q\left(V_{-x}B + E_H\right) - m_+\nu_- V_y = 0 \end{cases}$$

Sistema nelle incognite $E_H$ e $V_y$

$$E_H = -qEB \; \frac{m_+\nu_+ - m_-\nu_-}{m_+\nu_+ + m_-\nu_-}$$

Compito 2007

Campo magnetico terrestre $\vec{B} = 5 \times 10^{-5}$ T

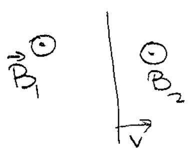
Corrente oceanica $v \approx 1\ ms^{-1}$

Conducibilità dell'acqua $\sigma \approx 4\ \Omega^{-1} m^{-1}$

Calcolare $\vec{J}$ in funzione dei dati.
Calcolare la forza magnetica $\vec{J} \wedge \vec{B}$ per unità di volume
In quanto tempo si fermerebbe la corrente per effetto di $\vec{J} \wedge \vec{B}$

Altro esercizio:

Due regioni di spazio con 2 B a valori diversi




$B_1 \neq B_2$ Una particella di massa $m$, carica $q$ e velocità iniziale $V$ ortogonale alla superficie di separazione.

Pisa 28 Novembre 2007 

Campi Magnetici nella materia:

Densità di magnetizzazione $\vec{M}$

Densità di corrente della magnetizzazione $\vec{J}_M \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$

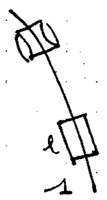
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_{lib} + \vec{J}_M) = \mu_0 \vec{J}_{lib} + \mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \underbrace{\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)}_{\vec{H}} = J_{lib} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = J_{lib}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Analogia formale con i dielettrici: $\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$ $\quad \vec{B} \leftrightarrow \vec{D}$

Se c'è una superficie di separazione tra due mezzi



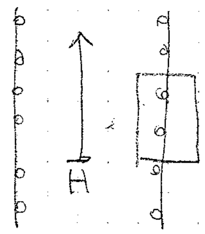

$$\longrightarrow B_{1\perp} = B_{2\perp}$$

$$\longrightarrow \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_{lib} \cdot d\vec{S} = (H_{2\parallel} - H_{1\parallel})\cancel{l} = \vec{J}_s \cdot \cancel{l}$$

corrente superficiale

$$\Rightarrow \vec{H}_{2\parallel} - \vec{H}_{1\parallel} = \vec{J}_s$$

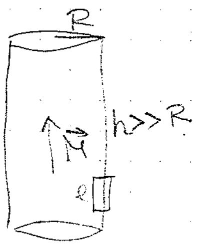
In un solenoide




$$\vec{H}_{int} - \underbrace{\vec{H}_{est}}_{0} = nI$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 n I$$

Campo magnetico con Magnetizzazione assegnata uniforme



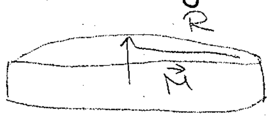

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} = 0 \quad \text{per } \vec{M} \text{ uniforme}$$

$$\text{ma } \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = I_M = J_M l$$
$$= Ml$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 J_s = \mu_0 M$$

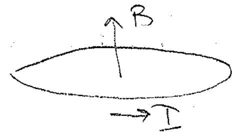
$$\vec{H} = 0$$

Cilindro magnetizzato




$$\vec{J}_s = \vec{M}$$

Posso vedere le cilindro come una spira in cui passa una corrente




$$I = \vec{J}_M h = \vec{M} h$$

$$\vec{B}_c = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 M}{2R} h \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad \frac{h}{R} \to 0$$

Altro Metodo:

$$J_{lib} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 0$$

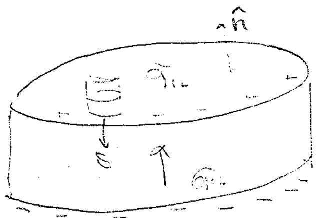
$$H = -\vec{\nabla} \Phi_M$$

$$\vec{\nabla}^2 \Phi_M = -\vec{\nabla}\vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{M} \overset{def}{\equiv} -\rho_M$$

dove si è definita la densità di carica magnetica $\rho_M$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \rho_M \end{cases} \qquad \begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho_{pol} \end{aligned}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = -\rho_M$ che è le teorema di Gauss in forma differenziale




$$\Phi(\vec{M}) = -MS$$

$$= Q_M = \sigma_M \cdot S$$

$$\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n}$$

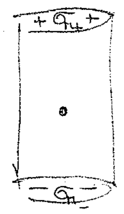
Viene quindi una specie di condensatore magnetico. Come

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{H} = \sigma_M = -\vec{M}$$

Vedi Picasso, ultimo capitolo

$$\vec{B} = \mu_0 (H + M) = 0$$

Se $h >> R$

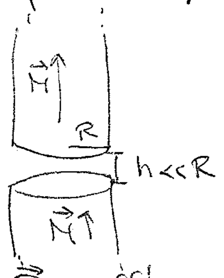



Possiamo vedere il cilindro come due cariche magnetiche puntiformi

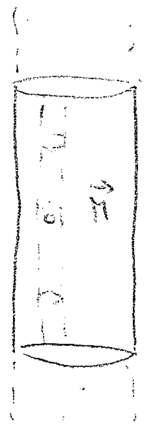
$q_M^+$ $\qquad$ $q_M^-$

dove $q_M = \sigma_M \cdot S = SM$

Compito 17/09/2007

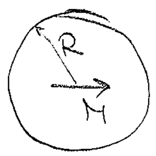



$\vec{B}$ sull' asse?



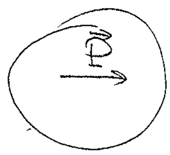

B all' interno della cavità.

Sfera Magnetizzata




Il campo è di dipolo magnetico all' esterno e uniforme all' interno

Per una sfera polarizzata si era visto




$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \quad (r<R) \quad \Rightarrow \quad H = -\frac{\vec{M}}{3}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left[3(\vec{P}\cdot\hat{n})\cdot\hat{n} - \vec{P}\right] \qquad (r \geq R)$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left[3(\vec{M}\cdot\hat{n})\cdot\hat{n} - \vec{M}\right]$$

$$\vec{B} = \mu_0(H+M) = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M} \quad (r<R)$$
$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} \qquad (r \geq R)$$

Verifichiamo che

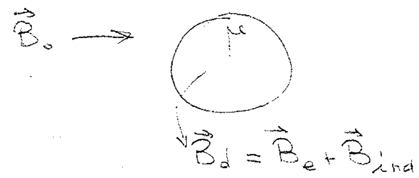
$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \qquad e \qquad H_{1//} = H_{2//}$$

~~Dielettrico~~ Paramagnetismo e diamagnetismo.
$\mu>1$ $\qquad\qquad$ $\mu<1$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0(H+M) = \mu_0 \underbrace{(1+\chi_m)}_{\mu_r} \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

Sfera in campo esterno




Si suppone un campo indotto di dipolo fuori e uniforme dentro. La magnetizzazione è unif.

$$B_d = \vec{B}_0 + \vec{B}_{ind} = \vec{B}_0 + \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M} = \mu \vec{H}_d$$

$$\vec{H}_d = \vec{H}_0 + \vec{H}_{ind} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \frac{\vec{M}}{3}$$

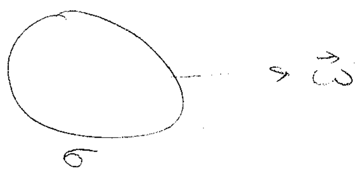
$$\Rightarrow \mu H_d = \boxed{\frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \frac{\vec{M}}{3} = \vec{B}_0 + \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}}$$ che si risolve per $\vec{M}$

$$\vec{B}_0 + \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M} = \left(\frac{B_0}{\mu_0} - \frac{\vec{M}\mu_0}{3}\right)\underbrace{\frac{\mu}{\mu_0}}_{\mu_r} \Rightarrow \vec{M} = \frac{3}{\mu}\left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}\right)\vec{B}_0$$

I superconduttori hanno $\mu_r = 0$

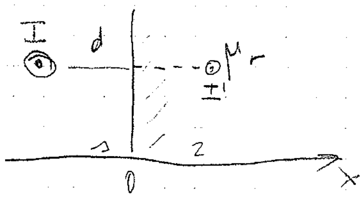
Calcolare corrente superficiale di questa magnetizzazione $J_s$

Problema



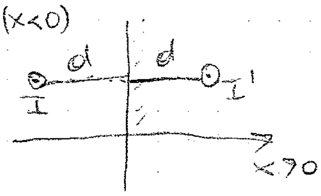

Palla carica superficialmente che gira. Calcolare campo magnetico, dovrebbe venire simile alla palla supercond.

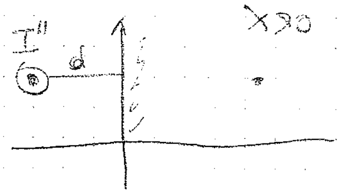
BI Es



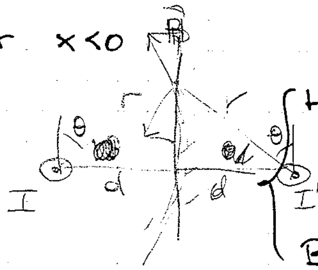

Filo immagine

(x<0)




Per x<0




$$\begin{cases} H_{1\parallel} = \dfrac{I}{2\pi r}\sin\theta - \dfrac{I'}{2\pi r}\sin\theta = \left(\dfrac{I-I'}{2\pi r}\right)\sin\theta \\ B_{1\perp} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\cos\theta + \dfrac{\mu_0 I'}{2\pi r}\cos\theta = \mu_0\dfrac{I+I'}{2\pi r}\cos\theta \end{cases}$$

per $x=0^-$

$$\begin{cases} H_{2\parallel} = \dfrac{I''}{2\pi r}\sin\theta \\ B_{2\perp} = \mu\dfrac{I''}{2\pi r}\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{I''}{\cancel{2\pi r}}\cancel{\sin\theta} = \dfrac{I-I'}{\cancel{2\pi r}}\cancel{\sin\theta} \\ \mu\dfrac{I''}{\cancel{2\pi r}}\cancel{\cos\theta} = \mu_0\dfrac{I+I'}{\cancel{2\pi r}}\cancel{\cos\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I-I' = I'' \\ \mu_0(I+I') = \mu I'' \end{cases} \qquad \begin{cases} I-I' = I'' \\ I+I' = \mu_r I'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} I'' = \dfrac{2I}{1+\mu_r} \\ I' = \dfrac{\mu_r-1}{\mu_r+1} I \end{cases}$$

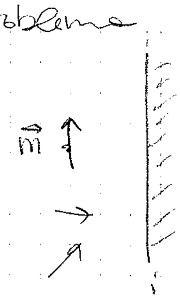
Se $\mu_r<1$ $\quad I>0 \quad I'<0$ forza repulsiva

Se $\mu_r=0$ $\quad I'=-I \quad I''=2I$ ma $\vec{B}_2=0$ anche se $H_2\neq0$

$\mu_r\gg1$ $\quad I''\to0 \quad I'\to I$ attrattiva

$B_2>0 \quad H\to0$

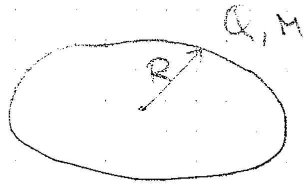
Problema



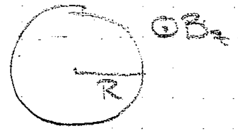

Calcolare forze tra due dipoli

Pisa 5 Dicembre 2007 

Campi Magnetici:




Anello carico conduttore




$$B_z = B_z(t) = B_0 \frac{t}{\tau}$$

$$\Phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad , \quad \Phi = \Phi(t)$$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ o in forma integrale $\oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S(\Gamma)} \vec{B}\, d\vec{S}$

Il campo elettrico é concentrico all'anello.

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{S(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_z(t)\, \pi R^2 = \pi R^2 B_0 \frac{t}{\tau}$$

$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_\Gamma E\, d\ell = 2E\pi R$ perché $E = \text{cost.}$ per $R$ cost.

$$2\cancel{\pi} \cancel{R} E = -\overbrace{\cancel{\pi} R^{\cancel{2}} \frac{B_0}{\tau}}^{\frac{\partial \Phi}{\partial t}}$$

$$E = -\frac{R B_0}{2\tau}$$

L'anello risente di una forza per via del campo elettrico

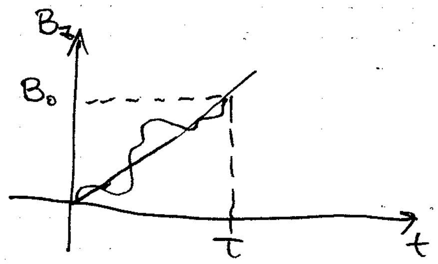
$$\delta m \frac{dv}{dt} = \delta q E$$

$$\delta m\, R \frac{d\omega}{dt} = \delta q E$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\delta q}{\delta m} \frac{E}{R} = \frac{Q}{M} \frac{E}{R} = -\frac{Q}{M \cancel{R}} \frac{\cancel{R} B_0}{2\tau} = -\frac{Q B_0}{2\tau M}$$

$$\omega(t) = -\frac{Q B_0}{2\tau M} t$$

$$\omega(\tau) = -\frac{Q B_0}{2M}$$




Per $B(t)$ che varia linearmente, $\omega(t)$ varia linearmente. Cosa succede se $B(t)$ varia in modo arbitrario ma rimane ancora vero che $B(\tau) = B_0$ ?

$$2\cancel{\pi} \cancel{R} E = -\cancel{\pi} R^{\cancel{2}} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$E = \frac{R}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{Q}{M}\,\frac{\ }{2}\,\frac{\partial B}{\partial t}$$

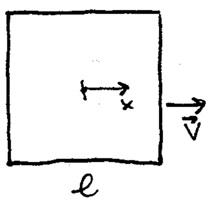
$$d\omega = -\frac{Q}{M}\,\frac{\ }{2}\,dB$$

$$\omega(t) - \omega(0) = -\frac{Q}{M}\,\frac{\ }{2}\left(B(t) - B(0)\right)$$

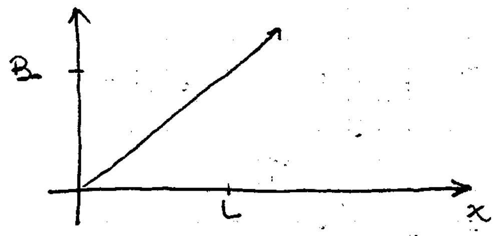
Se $\omega(0) = 0$ e $B(0) = 0$

Allora $\omega$ non dipenderà dal particolare andamento di $B$, ma solo dal suo valore finale a un certo istante.

Spira in moto in un campo costante non uniforme:



$$\odot B_z = B_0 \frac{x}{L}$$



$$\Phi(\vec{B}) = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_{x-\frac{\ell}{2}}^{x+\ell/2} B_0 \frac{x'}{L}\,\ell\,dx' \qquad \mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$= \frac{B_0\ell}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x-\frac{\ell}{2}}^{x+\ell/2} = \frac{B_0\ell}{2L}\left[\left(x+\frac{\ell}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{\ell}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{B_0\ell}{\cancel{2}L}\,\cancel{2}x\ell = \frac{B_0 x\ell^2}{L}$$

$$\Phi(B) = \frac{B_0\ell^2}{L}\,x \qquad x = vt$$

$$= \frac{B_0\ell^2}{L}\,vt = \int \frac{B_0\ell^2}{L}\,v\,dt$$

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_0\ell^2}{L}\,v = \mathcal{E}$$ forza elettromotrice indotta.

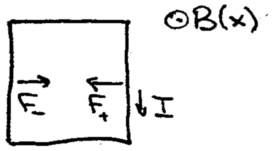
$$I = \frac{\mathcal{E}}{\underset{\text{resistenza}}{R}}$$

Potenza disipata $P_d = RI^2$

La corrente scorre in senso orario

Su questa corrente agisce la forza di Lorentz, che si oppone al moto della corrente.

Non essendo il campo uniforme, c'è una forza non nulla lungo $x$, mentre è nulla lungo $y$ perché i due lati orizzontali si annullano




$$F_{tot} = I\ell B\left(x-\frac{\ell}{2}\right) - I\ell B\left(x+\frac{\ell}{2}\right)$$

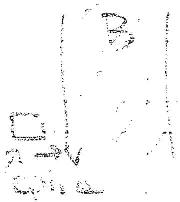
$$= I\ell \, \frac{1}{L}\left(\cancel{B_0 x} - B_0\frac{\ell}{2} - \cancel{B_0 x} - B_0\frac{\ell}{2}\right)$$

$$= -\frac{B_0 \ell^2 I}{L}$$

Lavoro da fare sulla spira, potenza meccanica

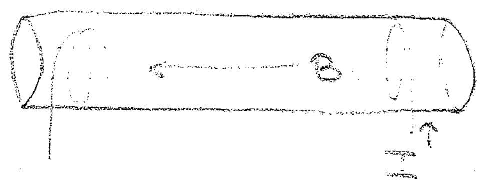
$$P_m = \vec{F}\cdot\vec{v} \quad = P_d$$

Domanda da orale




che fa la spira? Quando entra il campo aumenta, ma quando esce diminuisca.

Solenoide




$$B_0 = \mu_0 n I \qquad n = \frac{N}{L}$$

$$I = I_0 \sin(\omega t)$$

Cosa succede se il filo è avvolto a un materiale ferromagnetico di conducibilità non nulla $(\mu_0 > 0\ ,\ \sigma \neq 0)$?

$$B = \mu n I = \mu n I_0 \sin(\omega t)$$

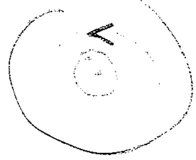
Viene indotto un campo magnetico concentrico centrato sull'asse del solenoide

$$2\pi r E = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \mu n I_0 \cos(\omega t)\, \omega$$

$$E = \frac{\omega r}{2} \mu n I_0 \cos(\omega t)$$

la conducibilità non nulla implica

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$



Nel cilindro è come che ci siano tanti solenoidi uno dentro l'altro.

$$\delta I = \vec{J}\, dr \qquad \text{(correnti parassite)}$$

Il fattore correttivo è più grande al centro e va diminuendo verso i bordi. La correzione è

$$B_1(r) = \int_r^R \mu n dI = \int_r^R \mu n \sigma E \, dr'$$

$$= \int_r^R \mu n \sigma \frac{\mu}{2} \omega r' n I_0 \cos(\omega t) \, dr'$$

$$= \int_r^R \frac{K}{2} r' \, dr'$$

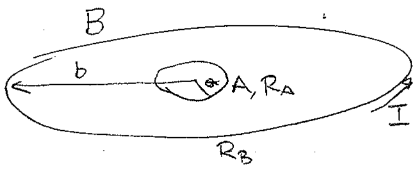
$$B_1(r) \approx (R^2 - r^2)$$

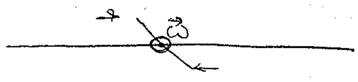
Pisa 12 Dicembre 2007

PSI ES

Mutua induzione di spire rotanti:

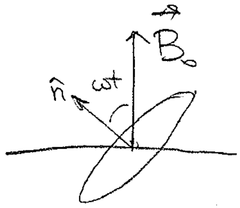
$a \ll b$




Corrente indotta nella spira piccola?

Nel centro c'è un campo $\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2b}\hat{z}$




$$\Phi(\vec{B}_0) \simeq \pi a^2 B_0 \cos(\omega t)$$

$$\mathcal{E}_A = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \omega\pi a^2 B_0 \sin(\omega t)$$

$$I_A = \frac{\mathcal{E}_A}{R_A}$$

Potenza dissipata in A : $P_d = R_A I_A^2 = \frac{\mathcal{E}_A^2}{R_A}$

$$= \frac{(\omega B_0 \pi a^2)^2}{R_A} \sin^2 \omega t$$

$\langle P_d \rangle$ = media sul periodo =

$$= \frac{1}{2}\frac{(\omega B_0 \pi a^2)^2}{R_A}$$

Momento delle forze meccaniche:

$|\vec{M}| = |\vec{m} \wedge \vec{B}_0|$ con $\vec{m} = I_A S\hat{n} = I_A \pi a^2 \hat{n}$

$$= m B_0 \sin(\omega t)$$

$$= I_A \pi a^2 \frac{\mu_0 I}{2b} \sin(\omega t)$$

$$= \frac{\omega\pi a^2 \sin(\omega t)}{R_A} B_0^2 \sin(\omega t) = -\frac{(\pi a^2 B_0)^2}{R_A}\vec{\omega} \sin^2(\omega t) = M_B = -M_{ext}$$

perché vogliamo le forze che si oppongono a quelle esterne. (momento resistente)

Potenza meccanica:

$$P_{mecc} = \vec{M}_{ext} \cdot \vec{\omega} = P_d$$

! controllare potenza mecc. e dissipata che devono essere uguali!

Ora il generatore da corrente solo alla spira A

$I_A = I$

Calcolare $I_B$

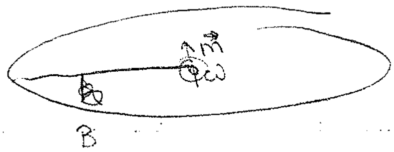
$\Phi_B = M_{AB} I_A$ ($M_{AB}$: coeff mutua induzione)

Posso calcolare $\Phi_A = M_{BA} I_B$ e $M_{BA} = M_{AB}$

Perciò M era già stato calcolato e vale

$$M(t) = \mu_0 \frac{\pi a^2}{2b} \cos(\omega t)$$

Se il sistema fosse,




con un momento di dipolo che gira, si può sostituire $\vec{m}$ con una spira equivalente tale che

$$\vec{m} = S i \hat{n}$$

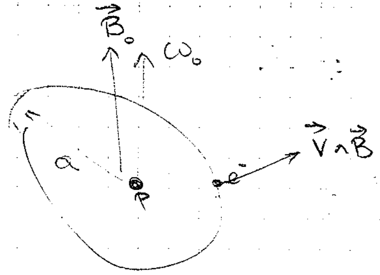
$$\Phi_B = \frac{\mu_0}{2b} \underbrace{(\underbrace{\pi a^2}_{S} \underbrace{I}_{i})}_{|\vec{m}|} \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \Phi_B = \frac{\mu_0}{2b} m \cos(\omega t)$$

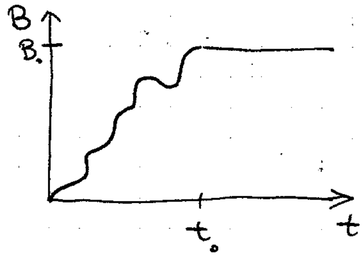
19/9/2005

Effetto Zeeman:

Un atomo in un campo magnetico




$$-\frac{k_0 e^2}{a^2} + m_e \omega_0^2 a = 0$$




$$\omega_0^2 = \frac{k_0 e^2}{m_e a^3}$$

Supponendo $\vec{a}$ costante

$$-e\vec{v}\wedge\vec{B} = \pm v B_0 \hat{r} = \pm a \omega B_0 \hat{r}$$ a seconda del segno di B

$$-\frac{k_0 e^2}{a^2} + m_e \omega^2 a \pm a \omega B_0 = 0$$

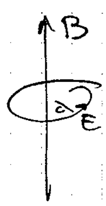
$$\omega^2 \pm \underbrace{\frac{eB_0}{m_e}}_{\text{frequenza di ciclotrone} \equiv 2\omega_L} \omega - \underbrace{\frac{k_0 e^2}{m_e a^3}}_{\omega_0^2} = 0$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2} \mp \omega_L$$

$$\omega_L \ll \omega_0 \Rightarrow \omega \simeq \omega_0 \pm \omega_L$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{1}{2} m_e v_0^2$$
$$= \frac{m_e}{2} a^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2$$
$$= \frac{m_e a^2}{2} (\omega_0^2 \pm 2\omega_0\omega_L + \omega_0^2) = \pm m_e a^2 \omega_0 \omega_L$$

Compare dunque un campo elettrico indotto dalla variazione di B, che ha prodotto la variazione di energia (ha fatto lavoro.




$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\Phi_c(\vec{B})$$
$$2\cancel{\pi} a E = -\cancel{\pi} a^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \mp eE$$

$$= \frac{ea}{2m_e} \frac{dB}{dt}$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t \frac{ea}{2m_e} \frac{dB}{dt}(t')dt'$$

$$= v_0 + \frac{ea}{2m_e} B(t)$$

$$v_f = v_0 + \frac{ea}{2m_e} B_0$$

$$\Delta U_f = \frac{1}{2} m_e \left(v_0 + \frac{ea}{2m_e} B_0\right)^2 - \frac{1}{2} m_e v_0^2$$

$$= \frac{1}{2} m_e a^2 (\omega_0 + \omega_L)^2 - \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 a^2$$

$$= m_e a^2 \omega_0 \omega_L + o(\omega_L^2)$$ che è quanto trovato prima.

Perché $a$ è considerabile costante?

$$F_r(t) = -\frac{k_0 e^2}{a^2} + m_e \omega^2(t) a \mp e v(t) B(t)$$

$$v(t) = a\,\omega(t) \quad , \quad \omega(t) \approx \omega_0 \pm \underbrace{\omega_L(t)}_{= \frac{eB(t)}{2m_e}}$$

$$F_r(t) = \cancel{-m_e \omega_0^2 a} + \cancel{m_e \omega_0^2 a} + \cancel{2 m_e \omega_0 \omega_L(t) a} \pm \cancel{e a \omega_0 B(t)} + O(\omega_L^2)$$

dunque fino almeno al second'ordine la forza radiale è nulla.

La spira ha un coefficiente di autoinduzione L.

Allora

$$\mathcal{E} - L\frac{dI}{dt} = RI$$

Per $\mathcal{E}$ costante e $I(0) = I_0$

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}\Big(\underbrace{I - \frac{\mathcal{E}}{R}}_{= I'}\Big)$$

$$\frac{dI'}{dt} = -\frac{\mathcal{E}}{R}\, I'$$

$$I'(t) = I'_0\, e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Risostituendo

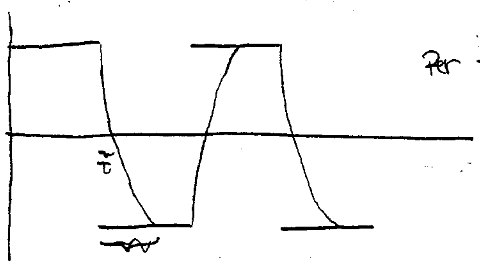
$$I(t) - \frac{\mathcal{E}}{R} = \left(I_0 - \frac{\mathcal{E}}{R}\right) e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Condizioni iniziali $\quad t = 0^+ \quad \mathcal{E} = -\mathcal{E}_0$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

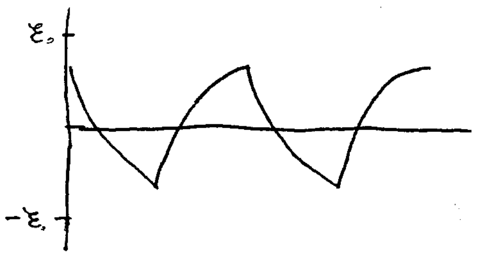
$$I(t) + \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{R} + \frac{\mathcal{E}}{R}\right) e^{-t/\tau}$$

$$I(t) = -\frac{\mathcal{E}_0}{R} + \frac{2\mathcal{E}_0}{R}\, e^{-t/\tau}$$




Per $\tau \ll \frac{\pi}{\omega}$

Per $\tau \gtrsim \frac{\pi}{\omega}$





$\sigma, Q \qquad \rho_0 = \dfrac{Q}{\frac{4\pi a^3}{3}}$

La carica si deve andare a distribuire sulla superficie.

Trovare la legge oraria per le cariche.

$$J(r,t) = \sigma E(r,t)$$

$$\Phi(E) = 4\pi r^2 E(r,t) = \frac{q(r,t)}{\varepsilon_0} \qquad \text{Gauss}$$

$$\Phi(J) = 4\pi r^2 \sigma E(r,t) = -\frac{dq(r,t)}{dt}$$

Dividendo membro a membro

$$-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\, q(r,t) = -\frac{d}{dt}\, q(r,t)$$

$$q(r,t) = \underbrace{q(r,0)}_{Q\left(\frac{r}{a}\right)^3} e^{-t/\tau} \qquad \text{con } \tau = \varepsilon_0/\sigma$$

$$\rho(r,t) = \rho_0 e^{-t/\tau}$$

Energia conservata?

Si ha una dissipazione per effetto Joule

$$\frac{dU_{es}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\, \underset{4\pi r^2 dr}{dV_e}\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\int_0^a \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(r,t)\, 4\pi r^2 dr + \underbrace{\cancel{\int_a^\infty \frac{\varepsilon_0}{2} E^2\, 4\pi r^2 dr}}_{\text{non cambia}}\Big)$$

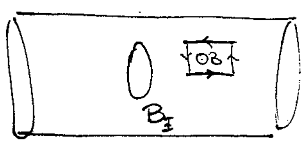
$$= \frac{d}{dt}\Big(\int_0^a \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(r,0)\, e^{-\frac{2t}{\tau}}\, 4\pi r^2 dr\Big)$$

$$= -\frac{2}{\tau}\frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^a E^2(r,t)\, 4\pi r^2 dr$$

$$\|$$

$$P_{diss} = \int \vec{J}\cdot\vec{E}\, dV_e = \int_0^a \sigma E^2(r,t)\, 4\pi r^2 dr \qquad \text{ma } \tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$$

Effetto Kelvin




$\rightarrow \vec{J} = \sigma\vec{E}$ $\qquad E = E_0 \cos\omega t$

$\vec{z}$

$$B_\Phi = \frac{\mu_0}{2} J r$$

Al prim'ordine $\vec{J} = \sigma \vec{E}_0 \cos\omega t$

$$B_\Phi = \frac{\mu_0}{2} J_0 r \cos\omega t$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\omega t + \vec{E}_1$$

con $\nabla\wedge E_1 = -\partial_t B_\Phi \hat{\Phi}$ $\Rightarrow$ $J_1 = \sigma E_1$

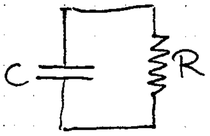
$E_1 = E_1(r)$ per simmetria

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}_1 = -\partial_r E_{1z}\hat{\Phi}$$

$$E_1 = \sin\omega t\,\Big(-\frac{\mu_0\omega\sigma E_0}{4} r^2 + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{valore sull'asse}}}{E_1(0)}\Big)$$

$$E_1(r,t) = \Big[E_1(0) - \frac{r^2}{\ell_s^2} E_0\Big]\sin\omega t \qquad \text{con } \underset{\substack{\uparrow\\ \text{lunghezza di pelle}}}{\ell_s} = \frac{2}{\sqrt{\mu_0\sigma\omega}}$$

Pisa 17 Dicembre 2007

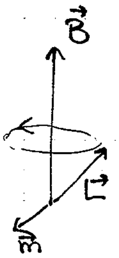



$$RI = \frac{Q}{C} \qquad C = \varepsilon_0 \frac{S}{h}$$

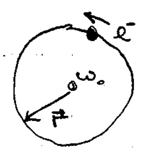
$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

$$-R\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{c}$$

Precessione di Larmor




$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma} \quad \text{momento meccanico}$$




$$I = -\frac{e}{T} = -\frac{e\omega_0}{2\pi}$$

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{m} = IS = -\frac{e\omega}{2\cancel{\pi}}\cancel{\pi} r^2 = -\frac{e\omega r^2}{2}$$

$$\vec{L} = m_e r^2 \omega \qquad r^2\omega = \frac{\vec{L}}{m_e}$$

$$\Rightarrow \vec{m} = -\frac{e\vec{L}}{2m_e}$$

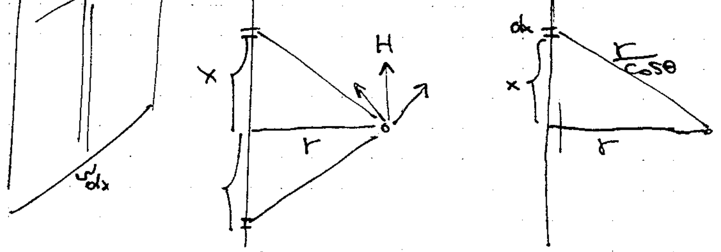
$$\vec{\Gamma} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L} \wedge \vec{B} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

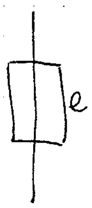
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = B \wedge \frac{e}{2m_e}\vec{L} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{\parallel B} = \text{costante}$$

Per Poisson $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_L \wedge L$ $\quad \omega_L$ frequenza di Larmor

$$\vec{\omega}_L = \frac{e\vec{B}}{2m_e}$$

H di un piano infinito:




$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = lJ$$

$$2H\cancel{l} = \cancel{l}J$$

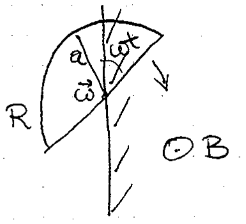
$$H = \frac{J}{2}$$

$$dH = \overbrace{J_s \frac{\cancel{r}}{\cos^2\theta}\, d\theta}^{dI} \; \frac{1}{2\pi\cancel{r}} \frac{\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\cos\theta}}$$

$$H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2J_s}{2\pi}\, d\theta$$

Pisa 18 Dicembre 2007

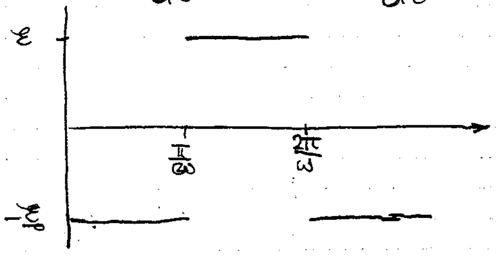
Compitino 2006




Trovare corrente

$$\Phi(B) = B \cdot S(t) = \frac{a^2 \omega t}{2}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \pm B \frac{dS}{dt} = \pm \frac{B a^2}{2} \omega \qquad I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$




$$\begin{cases} 0 < \omega t < \pi \quad (\text{mod } 2\pi) \\ \frac{dS}{dt} > 0 \end{cases}$$

$\pi < \omega t < 2\pi \quad (\text{mod } 2\pi)$

$\frac{dS}{dt} < 0$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\underset{\frac{\omega B a^2}{2}}{\mathcal{E}_0} \text{sign}(\pi - \omega t)$$

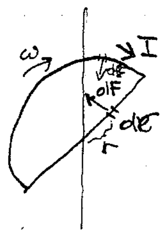
$$P_d = RI^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}$$

Nota che è costante e continua

$$= \frac{(\omega B a)^2}{4R}$$

$$= -P_{mec}$$

$\vec{M}_{ext}$, $\quad P_{mec} = \vec{M}_{ext} \cdot \vec{\omega}$




la forza di Lorentz infinitesima è $dF = I \vec{B} d\vec{\ell}$

$|d\vec{M}| = r\, dF \qquad 0 < r < a$

La parte curva subisce una forza radiale, quindi irrilevante per il momento.

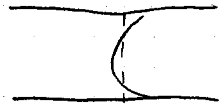
$$\vec{M}_B = \hat{z} \int_0^a r I B \, dr$$

$$= \hat{z}\, I B \frac{a^2}{2} \qquad I = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

$$= -\frac{B^2 a^2 \vec{\omega}}{4R} = -\vec{M}_{ext}$$

$E_1$ è massimo per $r=a$. Ci dobbiamo mettere nella condizione

$$\frac{a^2}{\ell_s^2} \ll 1 \qquad \ell_s = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \sigma \omega}} \approx 1 \text{ cm}$$



Con la condizione $I = \text{cost}$, $E_1(0) < 0$

La corrente passerà più ai bordi.

Si può ridefinire la resistenza come

$$R\langle I^2 \rangle = \int_{Vol.} \langle \vec{J} \cdot \vec{E} \rangle \, dV$$

$$R = \underbrace{\left(\frac{\ell}{\sigma \pi a^2}\right)}_{R_0} \left(1 + \frac{\pi}{12}\left(\frac{a}{\ell_s}\right)^4\right)$$