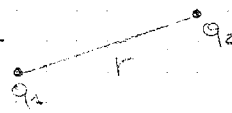


Elettrostatica:

Legge di Coulomb:

Due cariche puntiformi a distanza r tra loro esercitano una forza l'una sull'altra, secondo una proporzionalità



$$f \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Le cariche elettriche possono essere positive o negative. Cariche dello stesso segno si respingono, cariche di segno opposto si attraggono.

Nel sistema CGS: $f = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ con $q_{1,2}$ in Franklin, r in cm e f in dine.

Nel SI: $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ con $q_{1,2}$ in Coulomb

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

La carica elettrica elementare è

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

La carica elettrica è quantizzata ed è sempre un multiplo intero di e

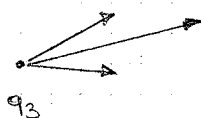
I materiali possono consentire il passaggio degli elettroni, e vengono detti conduttori, e altri che lo impediscono, detti isolanti.

I conduttori si dividono in:

I specie: metalli

II specie: soluzioni elettrolitiche

q_1



q_3

Con più di due cariche puntiformi si usano le consuete formule di somma vettoriale.

q_2

gianni.murzi@unipi.it
studio 28
/ Macchi
/ Macchi
Mancosu, S. Quirico
Pisa F.
Pisa
Macchi, Montezzi, Reggiani
"Problemi di elettromag."

CAMPO ELETTRICO



La forza su q_0 è:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_0}{r_{i0}^2} \hat{r}_{i0}$$

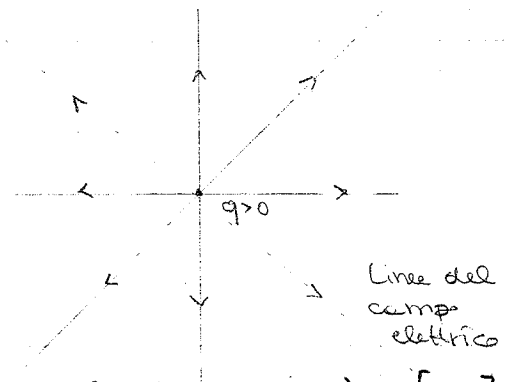
$$= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{i0}^2} \hat{r}_{i0}$$

Perciò la quantità $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{i0}^2} \hat{r}_{i0}$ è una caratteristica del punto dello spazio in cui giace la carica q_0

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{i0}^2} \hat{r}_{i0} = \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

Su scale macroscopica la carica viene considerata distribuita uniformemente.

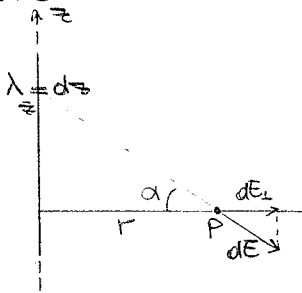


Una carica distribuita linearmente viene indicata con $\lambda = \left[\frac{C}{m} \right]$

Una densità superficiale di carica è indicata con $\sigma = \left[\frac{C}{m^2} \right]$

$$\rho = \left[\frac{C}{m^3} \right]$$

Problema



Quanto vale il campo elettrico in P?

$$dq = \lambda dz$$

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{r'^2} \cos \alpha$$

$$\sqrt{r^2 + z^2} = \frac{r}{\cos \alpha} \Rightarrow r^2 + z^2 = \frac{r^2}{\cos^2 \alpha}$$

$$\begin{cases} z = r \tan \alpha \\ dz = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha \end{cases}$$

Sostituendo:

$$dE_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} \cos \alpha \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

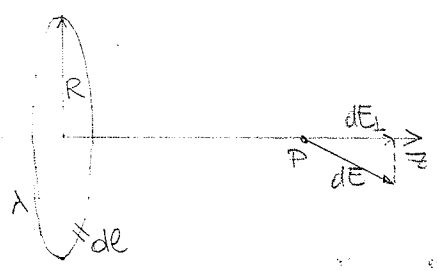
$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \alpha}{r} d\alpha$$

$$E = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \cos \alpha \, d\alpha$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} [\sin \alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Problema: Campo elettrico lungo l'asse dell'anello

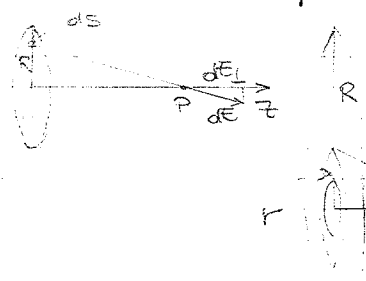


$$dE_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \, dl}{z^2 + R^2} \cos \alpha$$

$$E_{\perp} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R \lambda}{z^2 + R^2} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{R \lambda z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Problema: Campo elettrico lungo l'asse di un disco.



Suddividiamo il disco in anellini

$$dE_{\perp} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{r \lambda z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$dq = \lambda \, dl$$

$$= \sigma \, dl \, dr \quad \Rightarrow \quad \sigma \, dr \leftarrow \lambda$$

$$dE_{\perp} = \frac{\sigma \, dr}{2\epsilon_0} \frac{r z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

Sostituendo

$$z^2 + r^2 = \frac{z^2}{\cos^2 \alpha}$$

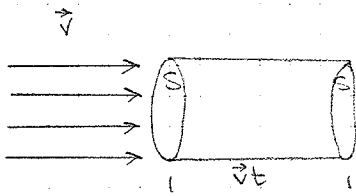
$$\begin{cases} r = z \tan \alpha \\ dr = \frac{z}{\cos^2 \alpha} \, d\alpha \end{cases}$$

$$dE_{\perp} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z \cdot z \tan \alpha \cdot z \, d\alpha}{\cos^2 \alpha} \frac{\cos^2 \alpha}{z^3}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\beta} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [1 - \cos \beta]$$

Pisa 1 Ottobre 2007

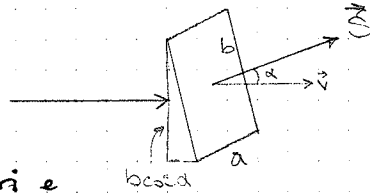
Flusso del Campo Elettrico:



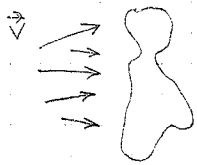
Il flusso di un fluido è definito come il volume di fluido che attraversa una superficie nell'unità di tempo

$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{S}$$

$$\Phi = \vec{v} \cdot ab \cos(\alpha)$$



Generalizzando per superfici irregolari e



velocità non costanti:

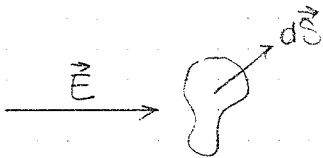
$$d\Phi = \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

$$\Delta\Phi_i = \vec{v}_i \cdot \Delta\vec{S}_i \Rightarrow \Phi \approx \sum_i \Delta\Phi_i = \sum_i \vec{v}_i \cdot \Delta\vec{S}_i$$

$$\Phi = \int \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

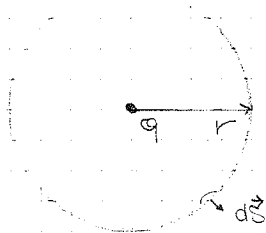
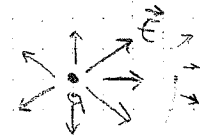
$$\vec{v} \cdot d\vec{S} = v_x dS_x + v_y dS_y + v_z dS_z$$

Flusso del Campo Elettrico:



$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Possiamo calcolare il flusso del campo elettrico dato da una carica puntiforme attraverso una calotta sferica con centro nella carica e anche attraverso una sfera completa:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E \, dS \quad \cancel{\cos \alpha} = E \oint dS = E 4\pi r^2$$

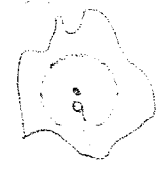
Per convenzione, il verso positivo del vettore $d\vec{S}$ è quello uscente

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \underbrace{4\pi r^2}_S = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Consideriamo ora una superficie chiusa irregolare.

Possiamo racchiudere la superficie irregolare tra due sfere.



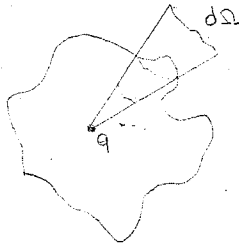
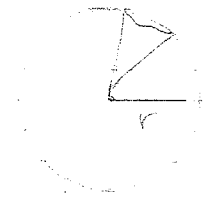
E' detto angolo

solido la parte di spazio

racchiusa dal cono che passa attraverso un cammino chiuso.

Gli angoli solidi si misurano come ...

$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

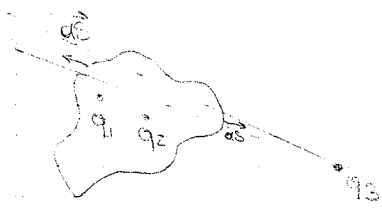
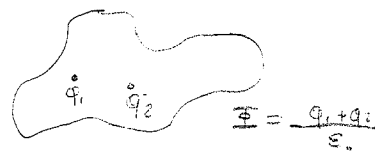


L'angolo solido non varia con l'orientamento della superficie

Teorema di Gauss

Il flusso del campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa e

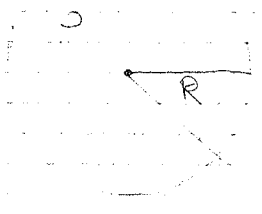
$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_{i \text{ int}}$$



Se presenti, le cariche esterne alla superficie non danno alcun contributo (perché la superficie è orientata)

Problema:

Sfera uniformemente carica con densità di carica ρ

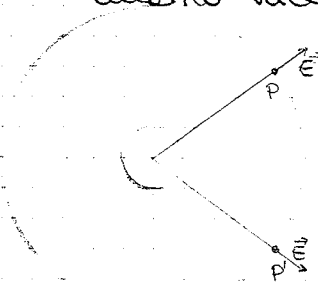


$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

Quanto vale il campo elettrico a distanza r?

Per motivi di simmetria E ed E' hanno la stessa intensità e verso.

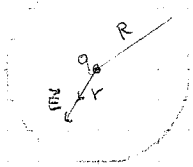
Si può quindi applicare il teorema di Gauss



$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint dS = E 4\pi r^2 \stackrel{\text{dove}}{=} \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Segue che $E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$

Problema:

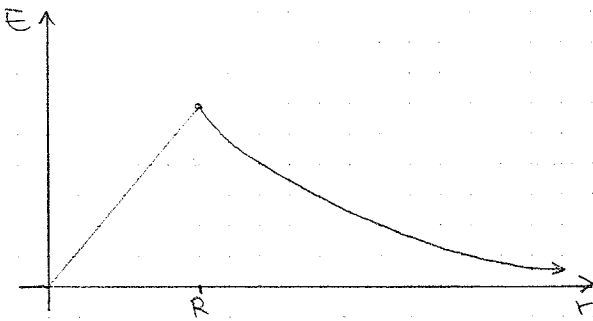


Ora $r < R$. Per gli stessi argomenti di simmetria, il campo è radiale.

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2 \stackrel{\text{per Gauss}}{=} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$E \cancel{4\pi r^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$E = \frac{r\rho}{3\epsilon_0}$$



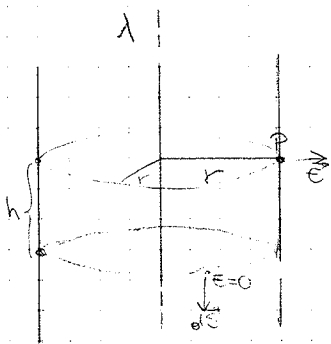
Nel modello atomico di Thompson l'atomo è una densità di carica uniforme di un raggio R. Un elettrone risentirebbe di una forza

$$f = -eE$$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

$$= -\frac{pe}{3\epsilon_0} r \quad (\text{Modello di un oscillatore armonico}).$$

Problema:



Fil infinito con densità di carica λ

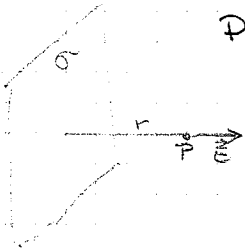
Per la simmetria il campo è radiale e perpendicolare al fil.

Applica il Teorema di Gauss su un cilindro

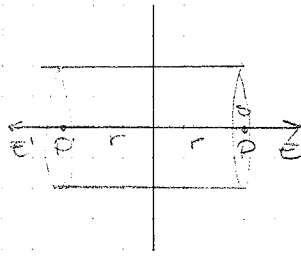
$$\int_{\text{superficie laterale}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = E 2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda h$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

Problema:



Piano carico infinito



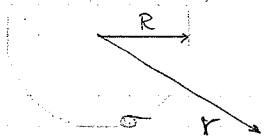
$$\Phi = 2\phi E = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

$$2\phi E = \frac{1}{\epsilon_0} \phi \sigma$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Teorema di Gauss:

Dimostrazione alternativa: Sfera carica superficialmente.



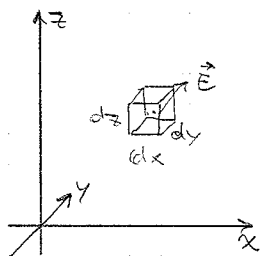
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{per } r > R$$

Per $r < R$

$$\vec{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$

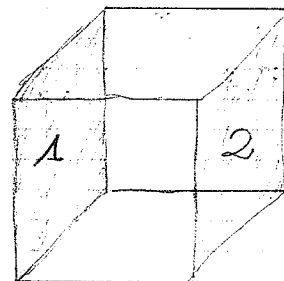
Non esiste una configurazione di cariche di equilibrio stabile: se una carica \tilde{q} in equilibrio in un punto e viene spostata, occorre una forza per riportarla al punto di inizio. Perché ci sia una posizione di equilibrio, occorre la presenza di una carica.

Cariche in Movimento e Teorema di Gauss in forma locale:



$$\vec{E} \equiv (E_x, E_y, E_z)$$

$$\begin{cases} E_{x2} = E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \\ E_{x1} = E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \end{cases}$$



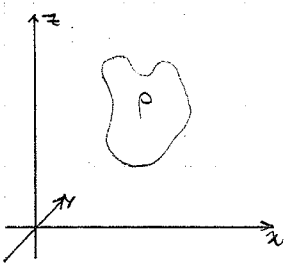
$$\begin{aligned} d\vec{E}_R &= \left[- \left(E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz \right] + \left[\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz \right] \\ &= - \cancel{E_x} dy dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{dx}{2} dy dz + \cancel{E_x} dy dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{dx}{2} dy dz \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz \end{aligned}$$

Sommando le altre due coppie di facce del cubo

$$d\vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ è un operatore vettoriale.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \text{divergenza di } \vec{E} \\ &= \text{div } \vec{E} \end{aligned}$$



Prendiamo ora una superficie chiusa qualunque.
 Il flusso totale attraverso la superficie di volume
 è uguale alla somma dei flussi attraverso gli infinitesimi
 simi di volume.

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{volume}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\tau && \text{dove } \tau \text{ indica il volume.} \\ &= \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{volume}} \rho \, d\tau \end{aligned}$$

Segue il Teorema di Gauss in forma differenziale

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Prima Equazione di Maxwell

(Perché quest'equazione sia vera, \vec{E} deve essere derivabile)

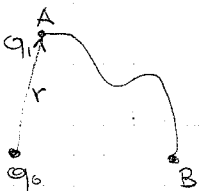
Esempio:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \vec{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\epsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &\Rightarrow \rho = \epsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} kx + \frac{\partial}{\partial y} ky + \frac{\partial}{\partial z} kz \right) \\ &= 3 \epsilon_0 k \end{aligned}$$

Lavoro delle forze del Campo Elettrico

Il campo elettrico è un campo conservativo



$$\begin{aligned} L &= \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q_1 \int_A^B \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_A^B \\ &= \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \end{aligned}$$



$$\vec{r} \cdot d\vec{\ell} = r \, d\ell \, \cos \alpha \approx r \, dr$$

Il lavoro non dipende dal particolare percorso scelto. Si può allora
 definire un'energia potenziale U :

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{r} + c$$

Da questo si definisce il potenziale $V = \frac{U}{q_1}$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r} + c$$

che è tale che, moltiplicato per la carica, fornisce l'energia potenziale in quel punto.

$$[V] = \left[\frac{J}{C} \right] = \text{volt}$$

$$[E] = \left[\frac{N}{C} \right] = \left[\frac{N \cdot m}{C \cdot m} \right] = \left[\frac{J}{C \cdot m} \right] = \left[\frac{V}{m} \right]$$

Il lavoro per spostare una carica di una distanza $d\vec{l}$ è

$$L = q\vec{E} \cdot d\vec{l} = -q dV = -U$$

e deve essere uguale e opposto alla variazione del potenziale

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV \quad *$$

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = -dV$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Si può quindi scrivere (*) come

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad \text{detto "gradiente di V"}$$

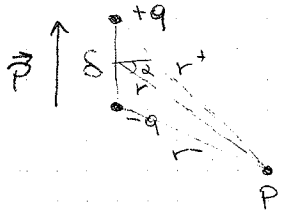
Con più cariche il potenziale è additivo:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

e per distribuzioni continue di carica

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} && \text{con } d\tau' = dx' dy' dz' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(x', y', z') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

Dipolo Elettrico:



E' costituito da due cariche uguali e opposte a distanza δ tra loro

$$\begin{aligned}V(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) \\&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_-q - r_+q}{r_+r_-} \\&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+}\end{aligned}$$

Per δ piccolo rispetto a r

$$r_-r_+ \approx r^2$$

$$r_- - r_+ \approx \delta \cos \alpha$$

$$\Rightarrow V \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta \cos \alpha}{r^2}$$

$q\delta$ è detto momento di dipolo elettrico

$$q\delta = \vec{p}$$

$$V \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

Dipolo Elettrico:



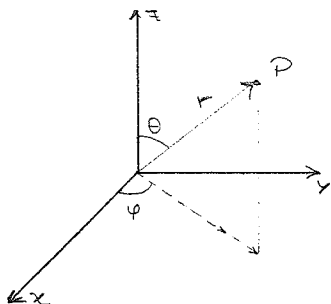
Momento del Dipolo.

$$\vec{p} = q\vec{\delta}$$

Per $r \gg \delta$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

Coordinate Sferiche:



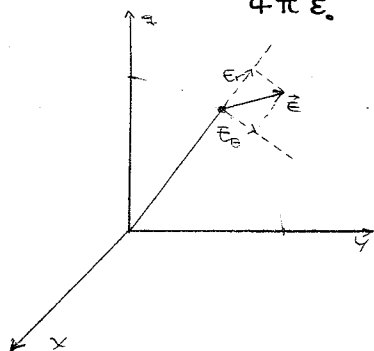
$$r > 0$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$0 < \varphi < 2\pi$$

Porando un dipolo lungo l'asse z si ha che il potenziale non dipende da φ (è simmetrica per rotazione attorno all'asse z).

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}$$



$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

$$dV = (\vec{\nabla}V) \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$= \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$\begin{cases} dl_r = dr \\ dl_\theta = r d\theta \\ dl_\varphi = r \sin\theta d\varphi \end{cases}$$

$$dV = (\vec{\nabla}V)_r dr + (\vec{\nabla}V)_\theta dl_\theta + (\vec{\nabla}V)_\varphi dl_\varphi$$

$$= (\vec{\nabla}V)_r dr + (\vec{\nabla}V)_\theta r d\theta + (\vec{\nabla}V)_\varphi d\varphi r \sin\theta$$

Confrontando le due espressioni di dV segue che

$$\begin{cases} (\vec{\nabla}V)_r = \frac{\partial V}{\partial r} \\ (\vec{\nabla}V)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ (\vec{\nabla}V)_\varphi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos\theta}{r^3} \\ \vec{E}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3} \\ \vec{E}_\varphi = 0 \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} z$$

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} z = -\frac{pz}{4\pi\epsilon_0} (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \left(-\frac{3}{2}\right) 2x$$

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{r^5}$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{r^5}$$

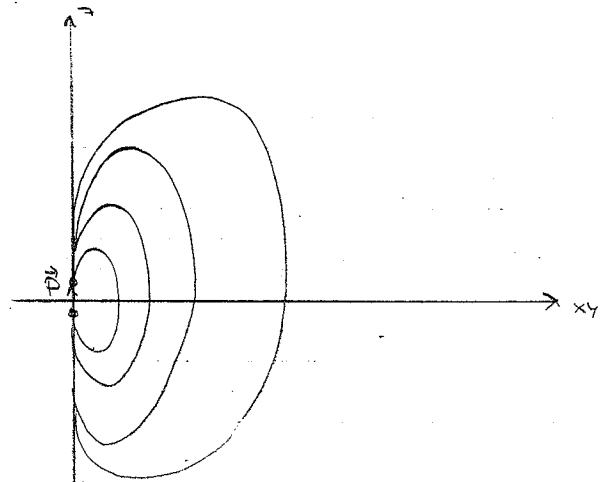
$$E_z = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[2z^2 \left(-\frac{3}{2}\right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} + (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \right]$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} (3z^2 - x^2 - y^2 - z^2) \right]$$

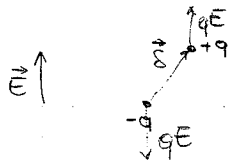
$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} (2z^2 - x^2 - y^2)$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^5}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$$



Mettiamo ora il dipolo in un campo elettrico uniforme:

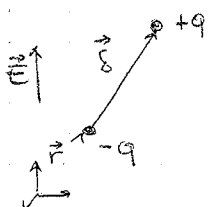
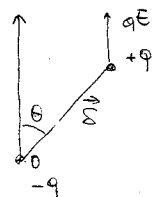


Il dipolo tenderà a girare.

Scegliamo come polo il punto in cui giace $-q$

$$|\vec{\Gamma}| = qE \delta \sin\theta = pE \sin\theta = |\vec{p} \wedge \vec{E}|$$

è la relazione che descrive il momento della forza che agisce sul dipolo



$$U = -qV(\vec{r}) + qV(\vec{r} + \vec{\delta})$$

$$= q [V(\vec{r} + \vec{\delta}) - V(\vec{r})] = q dV$$

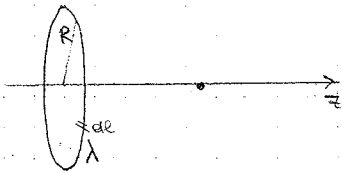
$$= -q \vec{E} \cdot \vec{\delta}$$

$$= -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

$$dV = -\vec{\nabla} V \cdot \vec{\delta}$$

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{\delta}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = \vec{\nabla} (\vec{E} \cdot \vec{p})_{\vec{p} = \text{cost.}}$$



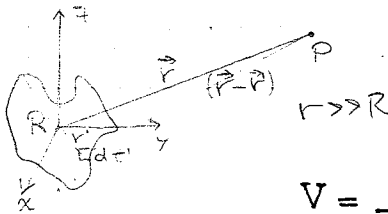
$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$Q = 2\pi R \lambda$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q (R^2 + z^2)^{-1/2} \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} (R^2 + z^2)^{-1/2} \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2}\right) (R^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2z \\ &= \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0} (R^2 + z^2)^{-3/2} \end{aligned}$$

Multipolo



$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(x', y', z') dt'}{|\vec{P} - \vec{P}'|}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') dt'}{|\vec{P} - \vec{P}'|}$$

Approssimiamo per $r' \ll r$

Sia $f(r, r') = \frac{1}{|\vec{P} - \vec{P}'|}$ e si sviluppa f in un intorno di $r' = 0$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x', y', z') dt' f(r, r')$$

$$f(\vec{P}, 0) = \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \rho(x', y', z') dt' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} Q \end{aligned}$$

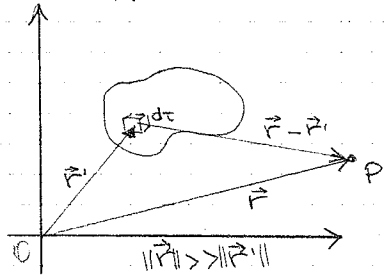
Cioè all'ordine 0 si approssima la distribuzione di carica ad una carica puntiforme situata nel centro della distribuzione

$$f(\vec{P}, 0) = \frac{1}{r} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x'} \Big|_{x'=0} x' + \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{y'=0} y' + \frac{\partial f}{\partial z'} \Big|_{z'=0} z'}_{\text{dipolo}} + \frac{1}{2} \dots + \underbrace{\dots}_{\text{quadrupolo}}$$

↑ monopolo ↑ dipolo ↑ quadrupolo
• q • -q +q • • -q
+q -q • +q

Pisa 16 Ottobre 2007

Sviluppo del Potenziale in serie di Multipli:



Il potenziale generato da una arbitraria distribuzione di carica a grande distanza è dato dalla relazione:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') d\tau' f(\vec{r}, \vec{r}')$$

dove si è posto $f(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Questo conto è tuttavia lungo e laborioso. Si approssima quindi la formula sviluppando $f(\vec{r}, \vec{r}')$ in serie di Taylor in un intorno di $\vec{r}' = \vec{0}$.

$$f(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} = \left[\sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2 \right]^{-1/2}$$

$$f(\vec{r}, \vec{0}) = \frac{1}{|\vec{r}|}$$

$$V^{(0)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho(\vec{r}') d\tau' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

termine di monopoli: si approssima la distribuzione di carica ad una carica puntiforme concentrata nell'origine.

Quest' approssimazione però non va bene nel caso la carica non sia distribuita secondo una simmetria sferica o quando la carica totale è nulla (si pensi al caso del dipolo).

Si procede allora nello sviluppo in serie.

$$\frac{\partial f}{\partial x'} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-1/2} = -\frac{1}{2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-3/2} (x-x')(-2) \Big|_{x'=0} = \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{y'=0} = \frac{y}{r^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z'} \Big|_{z'=0} = \frac{z}{r^3}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial z'} \right) r' = \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} = \frac{\hat{r} \cdot \hat{r}'}{r^2}$$

$$\Delta V^{(1)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \rho(r') d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int \vec{r}' \cdot \rho(r') d\tau'$$

$$\vec{\phi} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\tau'$$

$$V''(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{\phi}}{r^3}$$

Dove il secondo addendo è detto termine di dipolo e $\vec{\phi}$ è il momento di dipolo della distribuzione di carica $\rho(\vec{r}')$.

In alcune distribuzioni di carica anche il termine di dipolo del potenziale si annulla. Si procede allora nello sviluppo al secondo ordine, detto termine di quadrupolo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial y'} &= \frac{\partial}{\partial y'} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-3/2} (x-x') \\ &= + \frac{3}{2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-5/2} (x-x') (-2)(y-y') \\ &= 3(x-x')(y-y') \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-5/2} \Big|_{r'=0} = \\ &= \frac{3xy}{r^5} \end{aligned}$$

e in generale $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{3x_i x_j}{r^5} \quad \forall i \neq j \quad (*)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= - \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-3/2} + (x-x') \left(-\frac{3}{2} \right) \left[\dots \right]^{-5/2} (-2)(x-x') \Big|_{r'=0} = \\ &= \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \end{aligned}$$

Confrontando con (*) si ha in generale che

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \quad \text{con } \delta_{ij} \text{ delta di Kronecker.}$$

Perciò il termine di quadrupolo si scrive come

$$\Delta V^{(2)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \sum_{i,j} Q_{ij} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2)$$

dove $Q_{ij} = \int (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\vec{r}') d\tau'$

Si può quindi approssimare la distribuzione di carica ad un sistema di $1, 2, 4, \dots, 2^n$ cariche.

Circuitazione del campo elettrico e Teorema di Stokes:

Il lavoro fatto dalle forze del campo elettrico lungo un cammino chiuso è dato da

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$



ed è nullo per la conservatività del campo.

Definiamo il rotore di un vettore come

$$\text{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$

Applicando il rotore al campo elettrico si ha

$$\text{rot}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y, \frac{\partial}{\partial x} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_x, \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \right)$$

Ma ricordandosi che è

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\text{grad } V$$

si ottiene

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\text{rot}(\vec{\nabla} V) =$$

$$= \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}, -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}, -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right)$$

$$= (0, 0, 0)$$

cioè $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$ III equazione di Maxwell

Per il teorema di Stokes

$$\oint_{\ell} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \text{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

dove S è una superficie orientata bordata dal cammino chiuso ℓ .

Perciò, dalla circuitazione del campo elettrico segue che

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 = \int_S \text{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

Dunque il campo elettrico è irrotazionale, cioè

$$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

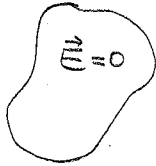
Sviluppo in serie di Multipli:

Il termine del potenziale di quadrupolo è

$$\Delta^{(2)} V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^5} \sum_{ij} Q_{ij} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2)$$

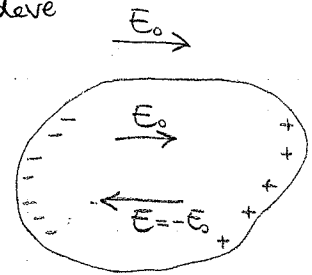
$$Q_{ij} = \int (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\vec{r}') d\tau'$$

Campi elettrici nei conduttori nel caso statico

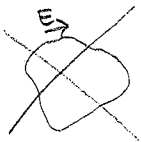


Perché valga la condizione di staticità, il campo all'interno del conduttore deve essere nullo.

Nel caso di un conduttore immerso in un campo esterno, le cariche migrano fino a generare un campo uguale e opposto

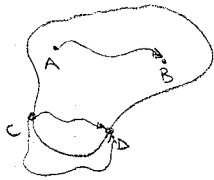


Non ci interessa per il momento la forma del conduttore, in quanto per il momento tratteremo solo le situazioni di equilibrio.



Non è possibile nel caso statico ottenere un campo elettrico tangente alla superficie.

In condizioni statiche dunque il campo elettrico è nullo all'interno del conduttore e sulla superficie, se presente, è perpendicolare alla superficie stessa. Questo ha delle ripercussioni sul potenziale



$$V(B) - V(A) = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

perché $\vec{E} = 0$ all'interno del conduttore

$V(D) - V(C) = 0$ lo si deduce ancora per la conservatività del campo.

Segue che il conduttore si trova tutto allo stesso potenziale.

Preso un volumetto all'interno del conduttore, per Gauss

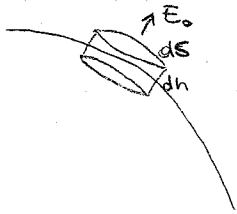


$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ma $\vec{E} = 0 \Rightarrow$ la carica totale deve essere nulla.

$$Q = 0$$

La carica migra allora alla superficie



Calcolando il flusso sul cilindretto, questo sarà diverso da 0.

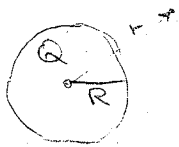
$$\vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 \epsilon$$

Il potenziale generato da un conduttore carico è proporzionale alla carica

$$V = \frac{1}{C} Q$$

dove C è la capacità del conduttore.

In una sfera carica



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \forall r > R$$

$$V = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & \forall r > R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} & \forall r \leq R \end{cases}$$

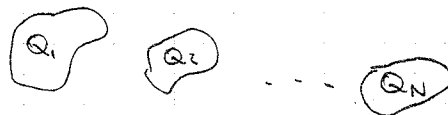
La capacità si misura in Farad

In presenza di più corpi carichi

$$V_i = \sum_j P_{ij} Q_j$$

dove P_{ij} è la matrice di coefficienti di potenziale

P_{ij} è simmetrica



$$P_{ij} > 0 \quad \forall i, j$$

$$P_{ii} > P_{ij} \quad \forall i \neq j$$

Invertendo la relazione si ha

$$Q_i = \sum_j C_{ij} V_j$$

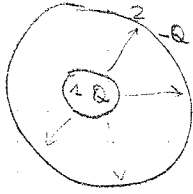
$$\text{con } [C] = [P]^{-1}$$

$$C_{ij} = C_{ji}$$

$$C_{ij} < 0 \quad \forall i \neq j$$

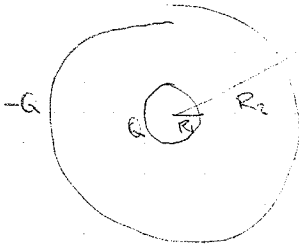
$$C_{ii} > 0$$

Induzione Completa - Condensatori



Il campo elettrico va dal conduttore interno a quello esterno totalmente

Condensatore sferico



Con il teorema di Gauss si vede subito che esternamente alla sfera grande il campo è nullo. Per quanto detto nel conduttore interno il campo è nullo. Quindi tutto il campo elettrico si deve trovare tra i due conduttori

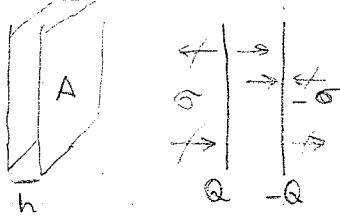
$$\Delta V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

quindi

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

CAPACITÀ del CONDUTTORE SFERICO

Condensatore piano



$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

per ipotesi che la carica sia distribuita uniformemente

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \leftarrow \quad \rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Approssimativamente il campo all'interno delle armature vale

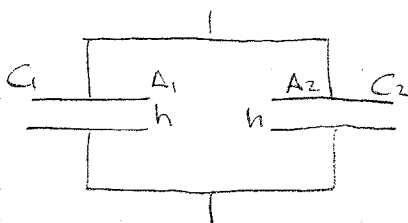
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} h$$

$$\Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{A}{h}$$

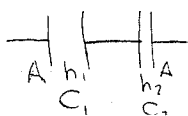
fare lim per raggi delle sfere $R_1 \rightarrow R_2$ che $\rightarrow 0$

Condensatori in parallelo



$$C_{eq} = \frac{\epsilon_0}{h} (A_1 + A_2) = C_1 + C_2$$

Condensatori in serie

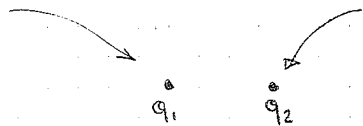


$$\frac{1}{C_{eq}} = \epsilon_0 \frac{h_1 + h_2}{A} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Energia di un sistema di cariche

$$q_1, q_2, \dots, q_N$$

Per calcolare l'energia immagino di portare le cariche dall'infinito alla loro posizione finale.



Per portare la carica q_2 ho fatto un lavoro

$$L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = -V_1 q_2$$

Per portare q_3 :

$$L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

Dunque l'energia potenziale sarà

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}}$$

$$\text{ma } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}} = V_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

Passando al continuo

$$U = \frac{1}{2} \int \rho V dt$$

Densità di Energia per unità di Volume

$$U = \frac{1}{2} \int \rho V dt$$

dalla 1^a eq. di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V dt$$

$$\vec{\nabla} \cdot (V \vec{E}) = (\vec{\nabla} V) \cdot \vec{E} + V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$

$$\text{ma } \vec{\nabla} V = -\vec{E}$$

$$= -E^2 + V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$

$$\Rightarrow V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (V \vec{E}) + E^2$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{\nabla} \cdot (V \vec{E}) dt + \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dt$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \oint_S V \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dt$$

Facendo tendere il volume all'infinito, il primo termine tende a 0 ^{BI} 1)

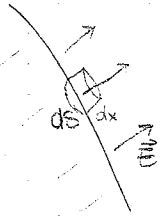
$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau \quad \text{definendo} \quad u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

la densità di energia

$$U = \int u d\tau$$

Pressione superficiale:

Facendo avanzare di dx un pezzetto dS di superficie del conduttore



$$dU = - dS dx \epsilon_0 \frac{E^2}{2}$$

$$dF = - \frac{dU}{dx} = dS \epsilon_0 \frac{E^2}{2}$$

$$p = \frac{dF}{dS} = \epsilon_0 \frac{E^2}{2}$$

C'è quindi una pressione che tende a far espandere il conduttore.

Pisa: 16 Ottobre 2007

Energia Potenziale

Energia di una sfera uniformemente carica:



Prendo le cariche all'infinito e le porto a costruire la sfera

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$



$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r} = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} dL &= V dq = \\ &= \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0} 4\pi r^2 dr \rho = \\ &= \frac{\rho^2}{3\epsilon_0} 4\pi r^4 dr \end{aligned}$$

Per trovare il lavoro totale integro tra 0 e R:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\rho^2 4\pi}{3\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr = \frac{\rho^2 4\pi}{15\epsilon_0} R^5 \\ &= \frac{4\pi R^5}{15\epsilon_0} \frac{3Q^2}{4\pi R^3} = \frac{3Q^2}{20\epsilon_0 R} \quad \text{sheglio} \end{aligned}$$

Classicamente si è usata per ricavare il raggio dell'elettrone.

$$E = mc^2$$

$$\frac{3e}{20\epsilon_0 R} = m_e c^2$$

Con questa legge però il raggio del protone sarebbe più piccolo di quello dell'elettrone.

Equazione di Poisson

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} V \end{cases} \quad \text{I q. di Maxwell}$$

$$-\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta \quad \text{laplaciano}$$

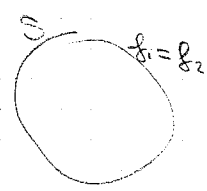
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Equazione di Poisson

L'equazione di Poisson permette definire il potenziale a partire dalla conoscenza di ρ all'interno di un certo volume e conoscendo il potenziale al bordo del volume

Vediamo che la soluzione dell'equazione di Poisson è unica. Se per assurdo esistono due soluzioni f_1, f_2 tali che



$$\Delta f_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Delta f_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta (f_1 - f_2) = \Delta f_1 - \Delta f_2 = 0$$

segue che sulla superficie $S, f_1 = f_2 = 0$ Posto $f = f_1 - f_2$

$$\int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot (f \cdot \vec{\nabla} f) d\tau \stackrel{\text{per divergenza}}{=} \int_S f \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{perché } f = 0 \text{ su } S$$

Ma

$$\int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot (f \cdot \vec{\nabla} f) = \int_{\tau} (\nabla f)^2 d\tau + \int_{\tau} f \Delta f d\tau = 0$$

perché $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla} f) = (\vec{\nabla} f)^2 + f \Delta f$

Deve dunque essere

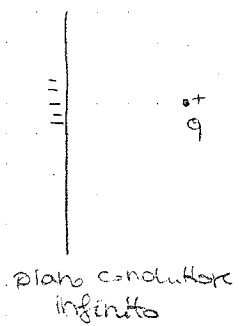
$$\int_{\tau} (\vec{\nabla} f)^2 d\tau = 0$$

ma allora f deve essere costante nel volume, cioè deve essere uguale a 0, il che implica

$$f = f_1 - f_2 = 0 \iff f_1 = f_2$$

\Rightarrow la soluzione dell'eq. di Poisson è unica.

Esempio: Metodo delle immagini

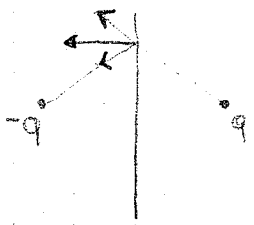


Il potenziale all'infinito è 0. Il piano arriva all'infinito \Rightarrow il potenziale sul piano è 0.

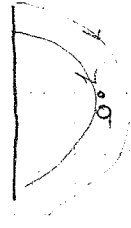
Il comp, se esiste, è ortogonale al piano, all'infinito nelle direzioni ortogonali è ancora 0.

Quindi lo spazio ha sempre un campo elettrico nullo.

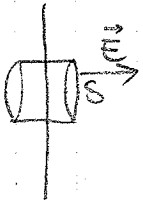
Prendiamo una carica $-q$ simmetrica rispetto alla prima, detta carica immagine. E è ortogonale al piano, quindi il potenziale è costante.



Il campo del semispazio in cui giace la carica reale non viene perturbato. Sul piano è dunque presente una distribuzione di carica che genera un campo equivalente a quello generato dalla carica immagine.

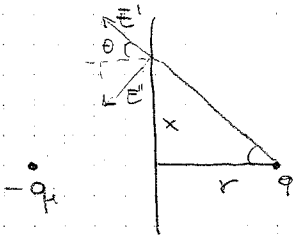


Si può usare la carica immagine per determinare la distribuzione di carica sulla superficie



$$\Phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{S\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 E$$



$$E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + x^2}$$

$$E' \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E = 2E' \cos\theta = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\sigma = -\epsilon_0 E = -\frac{1}{2\pi} \frac{qr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Se non ci sono cariche

$$\Delta V = 0$$

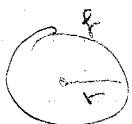
quindi il potenziale all'interno della sfera è uguale a quello sulla superficie.

Consideriamo una funzione f tale che in una regione dello spazio

$$\Delta f = 0$$



si dice che la funzione è armonica.



Vogliamo il valor medio della funzione f sulla superficie della sfera

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S f \, dS$$

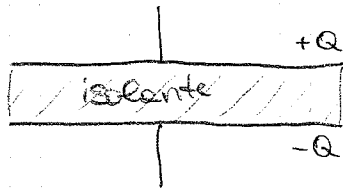
$$\begin{aligned}\bar{f}(r) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int f \, dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int f \frac{dS}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \int f \, d\Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{f}(r)}{dr} &= \frac{d}{dr} \frac{1}{4\pi} \int f \, d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{df}{dr} \, d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \oint \frac{df}{dr} \, dS \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \oint (\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{S} \quad \text{per la Divergenza} \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_V (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{\nabla} \, dt \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_V \Delta f \, dt \quad \text{ma } \Delta f = 0 \text{ per ipotesi} \\ &= 0\end{aligned}$$

Il valor medio è quindi indipendente dal raggio della sfera quando f è armonica. Nel limite per $r \rightarrow 0$ $\bar{f}(r) \rightarrow f(0)$, cioè f calcolato al centro della sfera.

Pisa 22 Ottobre 2007

Dielettrici e Polarizzazione:



Con il condensatore vuoto

$$C = \frac{Q}{V}$$

Con un mezzo isolante tra le armature la capacità aumenta.

Il fattore di incremento non dipende dalla geometria del condensatore

$$C_{\text{fin}} = \epsilon_r C_{\text{in}}$$

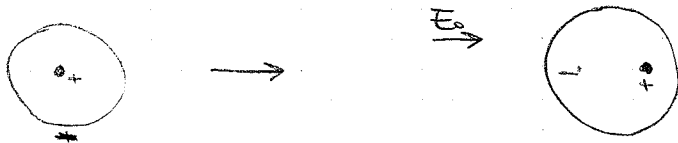
$$C = \epsilon_0 \frac{S}{h} \rightarrow C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{h}$$

$$\epsilon_r = \frac{C_{\text{fin}}}{C_{\text{in}}}$$

ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto

$\epsilon_r \epsilon_0$ è la costante dielettrica del mezzo.

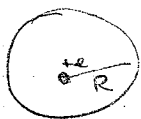
Del punto di vista microscopico, un atomo in un campo elettrico uniforme; la simmetria sferica dello stesso viene rotta:



Il baricentro di carica si sposta e compare un termine di dipolo nello sviluppo del potenziale. Questo effetto è detto polarizzazione per deformazione.

Un altro tipo di polarizzazione è quella per orientamento, che avviene nei liquidi polari.

Si può schematizzare un atomo di idrogeno come un protone circondato da una sfera di carica totale $-e$ distribuita uniformemente.



$$\rho = -\frac{e}{4\pi R^3}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = -\frac{e}{4\pi R^3} \frac{r}{3\epsilon_0} = -\frac{er}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

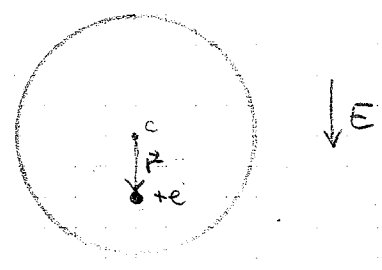
$$F = -\frac{e^2 r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

che è una forza di tipo elastico.

forza con cui protone e nuclea elettronica si attraggono

Un atomo di idrogeno in un campo elettrico E subirà allora una ~~forza~~

$$\vec{E} = \frac{e^2 r}{4\pi R^3 \epsilon_0}$$



$$r = \frac{E 4\pi R^3 \epsilon_0}{e}$$

da cui il momento di dipolo che si è venuto a creare è

$$re = \vec{p} = E 4\pi R^3 \epsilon_0$$

Con un campo sufficientemente intenso si riesce a strappare l'elettrone al nucleo e si ha la ionizzazione.

In generale

$$\vec{p} = \alpha_d \vec{E}_l$$

↳ campo elettrico locale: campo esterno con i contributi delle altre molecole tranne quella in esame
 ↳ polarizzabilità elettronica per deformazione

$$\alpha_d(\text{He}) = 0.22 \times 10^{-40} \text{ Fm}^2$$

$$\alpha_d(\text{Ne}) = 0.43 \times 10^{-40} \text{ Fm}^2$$

Polarizzazione per orientamento.

Siamo in presenza di molte molecole con dipoli permanenti \vec{p}_0 .
 Senza interventi esterni il momento complessivo è nullo.

In presenza di un campo elettrico, i dipoli sono soggetti a una coppia che tende a orientare le molecole.

$$\vec{\Gamma} = \vec{p}_0 \wedge \vec{E}$$

(ci saranno interventi dell'agitazione termica per spostare i dipoli dalla direzione del campo)

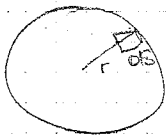
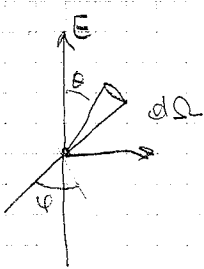
Usando la statistica di Boltzmann, la probabilità di orientamento è

$$W = A e^{-\frac{U}{k_B T}} \quad \text{con } U = +\vec{p}_0 \cdot \vec{E}$$

$A = \text{coeff. di normalizzazione.}$

La probabilità che una molecola si orienti entro un particolare angolo solido $d\Omega$ è

$$dW = A e^{-\frac{U}{k_B T}} d\Omega$$



$$dS \approx r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$dW = A e^{-\frac{p_0 E_e \cos\theta}{k_B T}} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$U = -pE_e \cos\theta$ non dipende da φ , perciò

$$dW = 2\pi A e^{-\frac{p_0 E_e \cos\theta}{k_B T}} \sin\theta \, d\theta$$

$k_B T$ è grande rispetto all'energia derivante dal dipolo,

si può perciò sviluppare in serie di Taylor

$$e^{-x} = 1 - x + o(x)$$

$$dW \approx 2\pi A \left(1 + \frac{p_0 E_e \cos\theta}{k_B T} \right) \sin\theta \, d\theta$$

$$\int_0^\pi dW = 1 = \int_0^\pi 2\pi A \left(1 + \frac{p_0 E_e \cos\theta}{k_B T} \right) \sin\theta \, d\theta$$

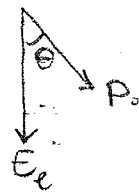
$$= \int_0^\pi 2\pi A \sin\theta \, d\theta + \int_0^\pi \frac{2\pi A p_0 E_e \cos\theta \sin\theta}{k_B T} \, d\theta$$

$$+ \int_0^\pi x \, dx \quad \begin{cases} x = \sin\theta \\ dx = \cos\theta \, d\theta \end{cases}$$

$$1 = 4\pi A \Rightarrow A = \frac{1}{4\pi}$$

$$dW = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_0 E_e \cos\theta}{k_B T} \right) \sin\theta \, d\theta$$

Vogliamo ora il valor medio $\langle P_z \rangle$, proiettato su \hat{E}_z



$$\langle P_z \rangle = \int_0^\pi p_0 \cos\theta \, dW$$

$$= \frac{p_0}{2} \int_0^\pi \cos\theta \left(1 + \frac{p_0 E_e \cos\theta}{k_B T} \right) \sin\theta \, d\theta$$

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ dx = -\sin\theta \, d\theta \end{cases}$$

$$= \frac{p_0}{2} \int_1^{-1} \left(x + \frac{p_0 E_e x^2}{k_B T} \right) dx$$

$$= \frac{p_0}{2} \int_1^{-1} x \, dx + \frac{p_0}{2} \int_1^{-1} \frac{p_0 E_e x^2}{k_B T} \, dx$$

$$= \frac{p_0^2 E_e}{2k_B T} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^{-1}$$

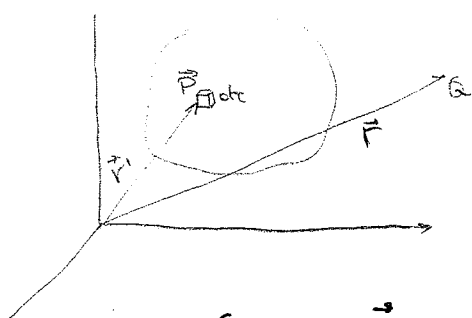
$$= \frac{1}{3} \frac{p_0^2 E_e}{k_B T}$$

$$\langle P_z \rangle = \alpha_0 E_z \quad \text{con} \quad \alpha_0 = \frac{P_0^2}{3k_B T}$$

Polarizzazione dal Macroscopico:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{P}_i}{\Delta\tau} \quad \text{con } \Delta\tau \text{ infinitesimo di volume}$$

(non è un limite esatto, il volume deve tendere a zero a livello macroscopico ma non microscopico, perché i dipoli sono discreti).



$$d\vec{p} = \vec{P} d\tau'$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}(\vec{r}') d\tau' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (\text{potenziale di dipolo})$$

$$V = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}(\vec{r}') d\tau' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow k_0 \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla} k_0 \frac{1}{r}$$

$$\vec{\nabla} [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-1/2}$$

$$\vec{\nabla} (\vec{r} - \vec{r}')^{-1} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \vec{P}(\vec{r}') d\tau' \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) - f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P} d\tau'$$

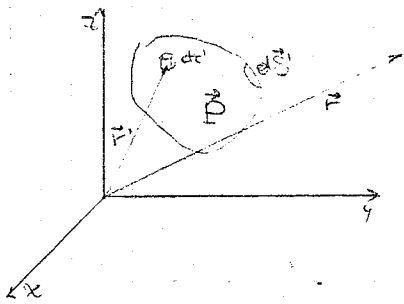
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

(per la divergenza)

Il potenziale generato da un corpo polarizzato è dunque uguale a quello di un corpo con densità di carica $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ e con una densità superficiale $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$

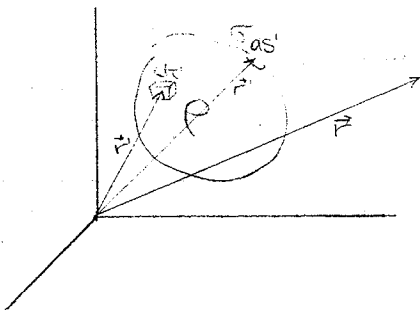
Pisa 23 Ottobre 2007

Polarizzazione:



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{P}(\vec{r}') d\tau' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

Supponiamo ora un corpo con distribuzione di carica volumica ρ e superficiale σ



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\sigma(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

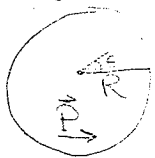
Confrontando le due espressioni si vede che il corpo polarizzato si comporta come un corpo con densità di carica ρ e σ , dove

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Se la divergenza $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ è nulla, allora la carica nell'infinitesimo di volume è nulla.

Sfera uniformemente polarizzata:



Devono comparire una densità volumica di carica di polarizzazione e una superficiale

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0 \quad \text{perché } \vec{P} \text{ è uniforme per ipotesi.}$$

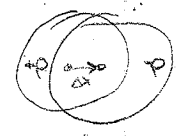
$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$= P \cos \theta$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{P \cos \theta dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

E' più rapido fare il conto con due sfere uguali ma con densità opposte, separate di Δx , tale che

$$\rho \Delta x = \vec{P}$$



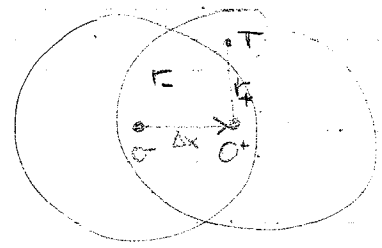
$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

Si ha dunque un dipolo di momento

$$\vec{P} = \Delta x \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{P}$$

ed il campo generato all'esterno della sfera è il campo di tale dipolo.

All'interno della sfera



$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}$$

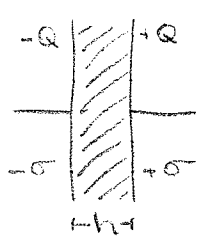
$$\vec{E}(T) = \frac{\rho \vec{r}_+}{3\epsilon_0} - \frac{\rho \vec{r}_-}{3\epsilon_0}$$

$$= \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (-\Delta x)$$

$$= - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Quindi il campo elettrico ha verso opposto alla polarizzazione.

Condensatori:



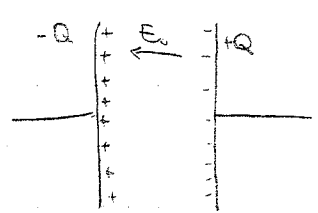
$$C = \frac{\epsilon_0 S}{h} \rightarrow \epsilon_r \frac{\epsilon_0 S}{h}$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

La carica sulle armature non cambia, quindi dopo aver inserito il dielettrico in potenziale deve calare

$$V \rightarrow \frac{V}{\epsilon_r} \quad \vec{E} \rightarrow \frac{\vec{E}}{\epsilon_r}$$

Il dielettrico tra le armature subisce la polarizzazione



Le cariche superficiali del dielettrico fanno diminuire il campo elettrico nelle armature, (diminuisce la carica) e quindi anche la differenza di potenziale.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

\downarrow campo macroscopico globale
 \downarrow suscettività dielettrica

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = -\epsilon_0 \chi E'$$

\downarrow campo misurato dopo che è stato messo il dielettrico.

Al'interno delle armature

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{prima dell'inserimento del dielettrico}$$

$$E' = \frac{\sigma - |\sigma_p|}{\epsilon_0} = \frac{\sigma - \epsilon_0 \chi E'}{\epsilon_0}$$

$$E' = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \chi E' = E - \chi E'$$

$$E' = \frac{E}{1 + \chi} = \frac{E}{\epsilon_r}$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = \chi + 1$$

Per la teoria microscopica

$$\vec{P} = n \alpha \vec{E}_e$$

\downarrow campo locale
 \downarrow polarizzazione molecolare
 \downarrow numero di molecole per unità di volume

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_p = \alpha_d + \frac{p_0^2}{3k_B T}$$

Se $\vec{E}_e \approx \vec{E}$ (molecole del dielettrico molto rarefatte)

$$\vec{P} = n \left(\alpha_d + \frac{p_0^2}{3k_B T} \right) E = \epsilon_0 \chi E$$

$$\chi = \frac{n}{\epsilon_0} \left(\alpha_d + \frac{p_0^2}{3k_B T} \right)$$

Relazione di Lorentz: (per liquidi non polari)

$$E' = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad \text{campo elettrico generato dalla sfera}$$

dielettrico con polarizzazione uniforme

$$E_e = E + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

\downarrow campo esterno eventuale

$$\vec{P} = n \alpha \vec{E}_e = \langle \vec{p} \rangle n$$

$$= n \alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$= n \alpha \vec{E} + \frac{n \alpha \vec{P}}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{P} \left(1 - \frac{n \alpha}{3\epsilon_0} \right) = n \alpha \vec{E}$$

$$\vec{P} = \frac{n \alpha \vec{E}}{1 - \frac{n \alpha}{3\epsilon_0}}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\Rightarrow \frac{n \alpha}{1 - \frac{n \alpha}{3\epsilon_0}} = \epsilon_0 \chi = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)$$

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{n} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

Relazione di Clausius - Mossotti

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j$$

per dielettrici allo stato solido.

Pisa 29 Ottobre 2007

Polarizzazione:

Il campo elettrico e il potenziale di un conduttore polarizzato si possono calcolare con la densità di carica di polarizzazione

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (1.1)$$

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (1.2)$$

Bisogna ora generalizzare la prima equazione di Maxwell per la presenza dei dielettrici polarizzati

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} \quad (2)$$

che per la (1.2) può essere scritta come

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho \quad (3)$$

si può definire il vettore spostamento di carica

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4)$$

e la prima equazione di Maxwell diventa

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho & \text{(I eq. di Maxwell)} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 & \text{(II eq. di Maxwell)} \end{cases} \quad (5)$$

Un dielettrico il cui tensore di polarizzazione χ_{ij} non dipende dalla posizione o dal campo è detto un dielettrico perfetto.

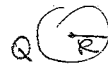
Se poi è anche un dielettrico isotropo χ_{ij} è diagonale con un solo ^{albre} autovettore e

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (6)$$

Consideriamo una sfera carica immersa in un dielettrico

ϵ_r

BI 18



Allora

$$\vec{D} = \vec{D}_0 \quad e \quad \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}$$

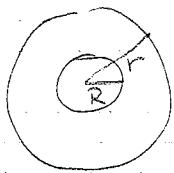
$$V = \frac{V_0}{\epsilon_r}$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, d\tau = \int \rho \, d\tau = Q_{\text{libera}}$$

↑
per Gauss

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \\ \chi = \epsilon_r - 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} \\ &= \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \end{aligned}$$



$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

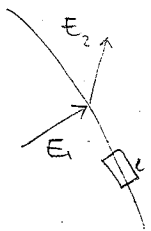
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q}{r^2}$$

$$D = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0 \quad \text{perché} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

Se ci fossero più dielettrici, sulle superfici di separazione può comparire una carica di polarizzazione

$$\epsilon_1 \quad \text{---} \quad \epsilon_2$$

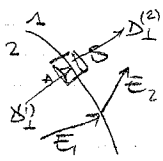


$$\left. \begin{array}{l} \vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1 \\ \vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2 \end{array} \right\} \text{per l'isotropia del dielettrico, dove} \\ \epsilon_i = \epsilon_0 \epsilon_{ri}$$

$$\vec{\nabla}_\perp \vec{E} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$E_{||}^{(1)} l - E_{||}^{(2)} l = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{||}^{(1)} = E_{||}^{(2)}$$



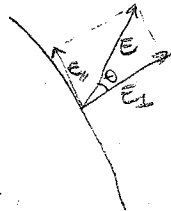
$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_1^{(2)} A - D_1^{(1)} A = 0$$

Sulla superficie ci sono solo cariche dovute alla polarizzazione

$$\Rightarrow D_1^{(2)} = D_1^{(1)}$$

$$E_{||}^{(1)} = E_{||}^{(2)} \quad e \quad D_{\perp}^{(1)} = D_{\perp}^{(2)}$$

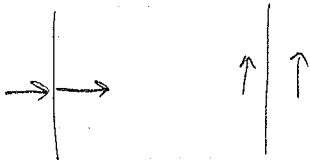
$$\epsilon_0 \epsilon_{r1} E_{\perp}^{(1)} = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_{\perp}^{(2)}$$



$$\frac{E_{||}^{(1)}}{\epsilon_{r1} E_{\perp}^{(1)}} = \frac{E_{||}^{(2)}}{\epsilon_{r2} E_{\perp}^{(2)}}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\epsilon_{r1}} = \frac{\tan \theta_2}{\epsilon_{r2}} \Rightarrow \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

che è la legge di rifrazione del campo elettrico



Se il campo elettrico è parallelo o perpendicolare alla superficie di separazione, rimane tale.

Densità di energia:

Nel vuoto

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

generato da cariche libere + cariche di polarizzazione

$$U = \frac{1}{2} \int \rho V dt$$

dovuto solo alle cariche libere

$$= \frac{1}{2} \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) V dt$$

$$\vec{\nabla} \cdot (V \vec{D}) = (\vec{\nabla} V) \cdot \vec{D} + V (\vec{\nabla} \cdot \vec{D})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{D} V) = \vec{\nabla} \cdot (V \vec{D}) - (\vec{\nabla} V) \cdot \vec{D}$$

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{\nabla} \cdot (V \vec{D}) dt - \frac{1}{2} \int (\vec{\nabla} V) \cdot \vec{D} dt$$

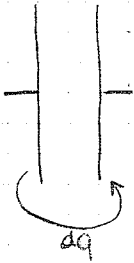
$$= \frac{1}{2} \int \vec{\nabla} \cdot (V \vec{D}) dt + \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \vec{V} \cdot \vec{D} ds + \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dt$$

tende a 0 per $r \rightarrow \infty$

$$u = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad \text{densità di energia per i dielettrici}$$

Esempio



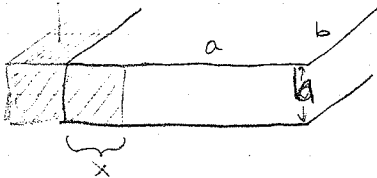
$$V = \frac{q}{C}$$

$$dL = V dq = \frac{q}{C} dq$$

$$U = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq$$

$$= \frac{Q^2}{2C}$$

dielettrico Dielettrico in un condensatore a Q costante.



Si può pensare come due condensatori in parallelo



$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r x b}{h}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 (a-x) b}{h}$$

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{h}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 b}{h} (\epsilon_r x + a - x) = \frac{\epsilon_0 b}{h} [(\epsilon_r - 1)x + a]$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$f = - \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 b} \frac{h}{[(\epsilon_r - 1)x + a]}$$

$$f = + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 b} \frac{h}{[(\epsilon_r - 1)x + a]^2} (\epsilon_r - 1)$$

Dunque il dielettrico viene risucchiato

Se il condensatore a $V =$ costante.

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

$$f = - \frac{\partial U}{\partial x} = - V^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\epsilon_0 b}{h} [(\epsilon_r - 1)x + a]$$

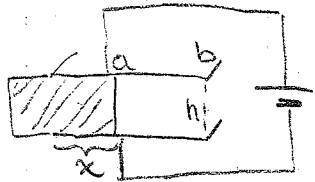
Sembrirebbe che il dielettrico venga spinto fuori, ma

$f = - \frac{\partial U}{\partial x}$ vale per sistemi isolati, mentre noi abbiamo

avere una pila che fa del lavoro.

Pisa 30 Ottobre 2007

Lastra dielettrica in un condensatore:



$$C = \frac{\epsilon_0}{h} b (\epsilon_r x + (a-x)) = \frac{\epsilon_0 b}{h} [(\epsilon_r - 1)x + a]$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \quad V = \text{costante.}$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\epsilon_0 b}{2h} (\epsilon_r - 1) V^2$$

Il condensatore non è un sistema isolato: la pila sta fornendo energia

Se la lastra avanza di dx

$$x \rightarrow x+dx \Rightarrow C \rightarrow C+dC$$

\Rightarrow la carica sul condensatore aumenta di

$$dQ = V dC$$

La pila, per portare la carica dQ deve fare un lavoro

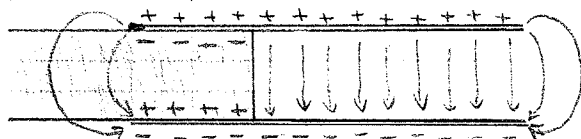
$$dL = V dQ = V^2 dC$$

$$dU = \frac{1}{2} V^2 dC$$

Solo metà del lavoro della pila va in energia del condensatore.

$$F_x = -\frac{\partial U_{\text{tot}}}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

e così la lastra di dielettrica torna ad essere risucchiata come ci si aspettava



La forza che spinge dentro la lastra è dovuta agli effetti di bordo del condensatore.

Tra le piastre del condensatore

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S \epsilon_0}$$

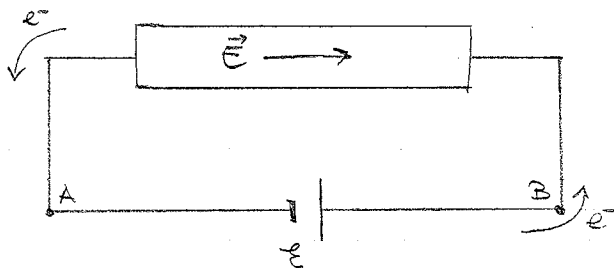
$$E^2 = \frac{Q^2}{S^2 \epsilon_0^2}$$

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{S^2 \epsilon_0}$$

$$U = \tau u$$

$$= \frac{1}{2} h \frac{Q^2}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \text{perché } C = \frac{\epsilon_0}{h}$$

Correnti Elettriche:



\mathcal{E} è la forza elettromotrice.

Tra A e B si ha una differenza di potenziale costante.

Modello di Drude per la conduzione nei metalli:

Gli elettroni vengono paragonati ad un gas perfetto

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

$$m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$T \approx 300 \text{ K}$$

$$v \approx 1.2 \times 10^5 \text{ ms}^{-1}$$

La corrente elettrica è per definizione la quantità di carica che attraversa una superficie orientata nella unità di tempo.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Se il moto degli elettroni è dovuto solo all'agitazione termica, la corrente complessiva è nulla. Se però viene immerso il conduttore in un campo elettrico, esisterà una direzione privilegiata.

Gli elettroni non sono accelerati all'infinito per via degli urti con il reticolo cristallino. Non si tratta di urti elastici, si schematizza che dopo l'urto l'elettrone rimbalza in una direzione casuale con velocità termica.

$$\Delta \vec{v} = - \frac{e \vec{E}}{m_e} \Delta t$$

Tra un urto e l'altro.

La velocità di deriva sarà

$$\bar{v}_d = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = E \left(-\frac{e \Delta t}{2m} \right) = \bar{E} \mu \quad \bar{v}_d \approx 10^{-2} \text{ ms}^{-1}$$

dove μ è la mobilità degli elettroni

Il risultato della velocità di deriva è paragonabile ad un moto in presenza di attrito viscoso

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - \gamma\vec{v}$$

$$\vec{v}_d = \frac{q}{\gamma} \vec{E}$$

Definiamo il vettore densità di corrente:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d$$

↳ carica del portatore di carica
↳ numero portatori di carica per unità di volume

Una superficie dS è attraversata da una corrente

$$dI = \frac{dq}{dt} = \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Per superfici estese sarà dunque

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

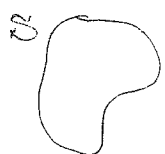
Nei conduttori ohmici

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

↳ conducibilità.

In un filo conduttore la velocità di deriva è costante e in condizioni stazionarie il campo elettrico è costante all'interno del filo.

Prendiamo una superficie chiusa S



$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = 0$$

in condizioni stazionarie.

Per il teorema della divergenza

BI 21

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, d\tau \quad \text{e} \quad Q = \int_V \rho \, d\tau$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \frac{dQ}{dt}$$

“ “ “ “

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, d\tau = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau$$

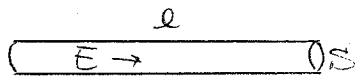
$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

che consegue alla conservazione della carica.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Legge di continuità della corrente.

Questa ultima relazione è equivalente alla I legge di Kirchhoff (legge dei nodi). Prendendo una superficie intorno a un nodo segue la legge di continuità per la corrente.



$$V = lE$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$= l \frac{\vec{J}}{\sigma}$$

$$I = JS$$

$$= l \frac{I}{\sigma S}$$

Definendo la resistenza

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \rho \frac{l}{S}$$

con $\rho = \text{resistività} = \frac{1}{\sigma}$

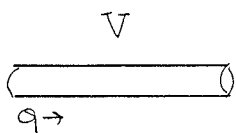
si ottiene la legge di Ohm

$$V = RI$$

$\frac{1}{R} = G$ conduttanza

misurata in mho (ohm letto al contrario)

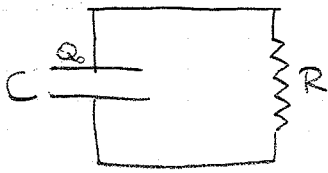
ora si usano i siemens.



Dopo aver attraversato un filo i cui estremi sono a d.d.p. $= V$, una carica q ha perso un'energia

$$\Delta E = qV$$

$VI = W$ è la potenza dissipata (legge di Joule)



$$V = \frac{Q}{C} = RI$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{Q}{C} = - \frac{dQ}{dt} R$$

$$\frac{dQ}{dt} = - \frac{1}{RC} Q$$

$$Q = A e^{\alpha t}$$

$$\alpha A e^{\alpha t} = - \frac{1}{RC} A e^{\alpha t}$$

$$\alpha = - \frac{1}{RC}$$

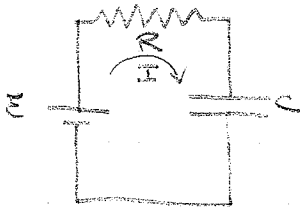
$$Q = A e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$t=0 \Rightarrow Q=Q_0 \Rightarrow Q_0=A$$

$$= Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I = - \frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Carica del Condensatore



$$\mathcal{E} = RI + \frac{Q}{C}$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$\mathcal{E} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

L'equazione omogenea associata è

$$\frac{dQ}{dt} R + \frac{1}{C} Q = 0$$

$$R \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{C}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}$$

$$Q = A e^{\alpha t}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha A e^{\alpha t}$$

$$\alpha A e^{\alpha t} = -\frac{1}{RC} A e^{\alpha t}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{RC}$$

$$\Rightarrow Q = A e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare

$$\mathcal{E} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

Se $Q = \text{costante}$

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{C} \Rightarrow Q = \mathcal{E}C$$

Sommando la soluzione dell'omogenea a quella particolare

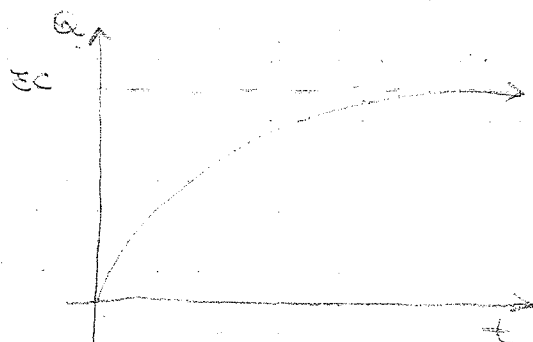
$$\mathcal{E}C + A e^{\alpha t} = \mathcal{E}C + A e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Imponendo $Q(t=0) = 0$

$$0 = \mathcal{E}C + A \Rightarrow A = -\mathcal{E}C$$

La soluzione sarà allora

$$\mathcal{E}C (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$



Magnetismo:



In principio si pensava che il magnetismo fosse dovuto a delle cariche magnetiche.

Non sono stati finora osservati monopoli magnetici. Ørsted fu il primo a intuire una correlazione tra elettricità e magnetismo.

Carica elettrica in un campo magnetico:

Se la carica è ferma la carica non risente del campo magnetico. Se invece la carica si muove con velocità \vec{v} , essa risente della forza di Lorentz



$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Da cui si ricavano le dimensioni per il campo magnetico

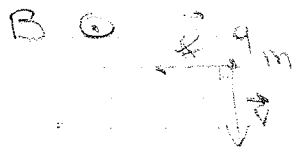
$$\text{kg m s}^{-2} = \text{C m s}^{-1} [B]$$

$$[B] = \text{kg s}^{-1} \text{C}^{-1} \equiv [T] \quad \text{tesla}$$

Nel sistema cgs l'unità di misura del campo magnetico è il Gauss

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

Il campo magnetico terrestre a queste latitudini è dell'ordine di 0.5 G.



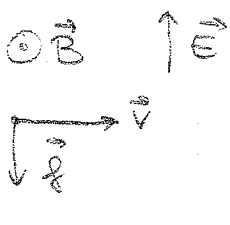
La forza di Lorentz agisce ortogonale alla velocità, come una forza centripeta, per cui la particella descriverà delle orbite circolari

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$$

Il periodo non dipende dunque dalla velocità.

La frequenza $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{m} \frac{1}{2\pi}$ è detta frequenza di ciclotrone, che viene usata nei grandi laboratori e nei forni a microonde per accelerare le particelle ed emettere radiazioni.



Carica in campo elettrico e magnetico e settore di velocità:

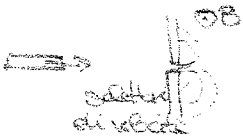
$$\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Se eguaglio le forze dovute a \vec{B} e \vec{E} , le particelle andranno dritte.

$$qE = qvB$$

$$v = \frac{E}{B}$$

Le particelle che andranno dritte avranno tutte la stessa velocità. Si usa questo principio negli spettrometri di massa, per separare i vari isotopi degli elementi, sfruttando che il raggio dell'orbita dipende dalla massa.



Filo percorso da corrente in un campo magnetico

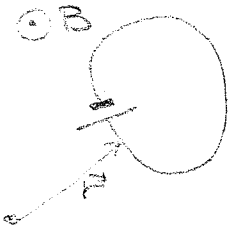


$$d\vec{f} = m\vec{v}_d dA \, dl \wedge \vec{B}$$

$$= I \, d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$= \vec{J} \wedge \vec{B} \, d\tau$$

con J densità di corrente.



$$\vec{F} = I \oint d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Se il circuito è rigido sarà presente un momento meccanico

$$\vec{\Gamma} = I \oint \vec{r} \wedge (d\vec{l} \wedge \vec{B})$$

La forza totale su un circuito immerso in un campo magnetico uniforme è nulla.

OB

$$d\vec{\tau} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Ad equilibrio ci sarà una tensione del filo

$$2T \sin \frac{\theta}{2} \sim 2 \frac{T d\theta}{2} = T d\theta$$

$$d\theta = \frac{de}{r}$$

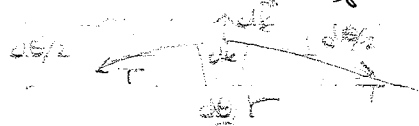
$$T \frac{de}{r} = d\tau = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

$$\frac{T}{r} = I B$$

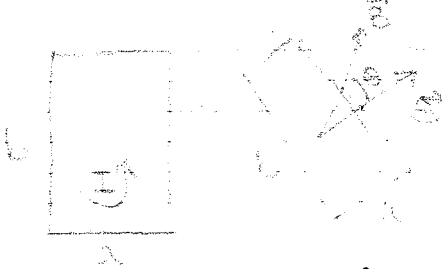
$$r = \frac{T}{IB}$$

$$r = \frac{L}{2\pi}$$

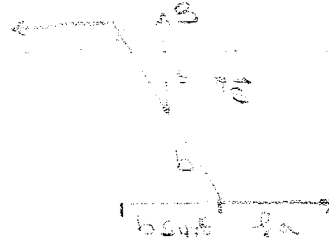
$$\Rightarrow T = \frac{L I B}{2\pi}$$



Spira in un campo magnetico uniforme



Per semplicità i lati a sono ortogonali a \vec{B}



$$F_a = I a B$$

Nasce una coppia di forze

$$\vec{\Gamma} = I a b \sin \theta$$

da cui definiamo il momento di dipolo magnetico

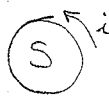
$$\vec{m} = I \vec{S}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

dove \vec{S} è orientato dalla parte in cui vedo scorrere la corrente in senso antiorario.

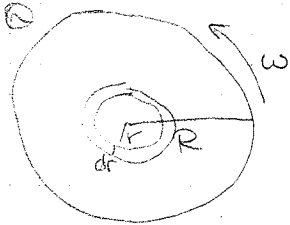
Pisa 13 Novembre 2007

Momento Magnetico:



$$\vec{m} = IS \hat{n}$$

Momento magnetico di un disco uniformemente carico rotante



$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

Suddividiamo il disco in corone concentriche

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

$$dI = \frac{dq}{dt} = \sigma 2\pi r dr \frac{1}{T} = \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{2\pi \sigma r dr \omega}{2\pi} = \sigma \omega r dr$$

$$d\vec{m} = \omega \sigma r dr \pi r^2 = \pi \omega \sigma r^3 dr$$

$$\vec{m} = \int_0^R d\vec{m} = \int_0^R \pi \omega \sigma r^3 dr = \pi \omega \sigma \frac{R^4}{4} \quad \sigma \pi R^2 = Q$$

$$= \frac{\omega Q R^2}{4}$$

Anche una sfera carica rotante acquista un momento magnetico.

Anche le particelle elementari possono essere schematizzate come sfere cariche rotanti, e hanno pertanto un momento magnetico non nullo.

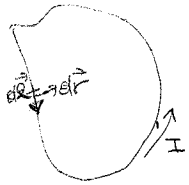
Energia Meccanica di una spira:



Per spostare una spira percorsa da corrente in un campo magnetico bisogna fare lavoro contro la forza di Lorentz.

Ipotesizziamo che la corrente sia costante e che il campo magnetico non interferisca con la corrente. Siamo perciò per il momento trascurando il lavoro che deve essere.

fatto affinché la spira verifichi tali ipotesi.



$$d\vec{f} = -d\vec{f}_B = -I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$dL = dU_m = \oint d\vec{f} \cdot d\vec{r}$$

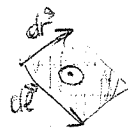
$$= -I \oint (d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{l} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{r} = d\vec{r} \wedge d\vec{l} \cdot \vec{B}$$

$$= -d\vec{l} \wedge d\vec{r} \cdot \vec{B}$$

$$= I \oint (d\vec{l} \wedge d\vec{r}) \cdot \vec{B}$$

$d\vec{l} \wedge d\vec{r}$ è la superficie del romboido di lati $d\vec{r}$ e $d\vec{l}$.



Stiamo pertanto calcolando il flusso di \vec{B} attraverso la superficie nastriforme che unisce la spira nella sua posizione iniziale alla spira nella posizione finale.

$$dU_m = I \oint d\vec{S} \cdot \vec{B}$$

Per la seconda eq. di Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Considerando la superficie chiusa data dalla spira nella posizione iniziale, la spira nella posizione finale e il nastro che le unisce, questo flusso deve fare 0



Sarà allora

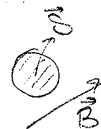
$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$dU_m = -I d\Phi$$

$$\rightarrow U_m = -I\Phi + C$$

perché dovendo essere il flusso totale nullo, la variazione $d\Phi$ deve essere compensata da un $-d\Phi$ attraverso il nastro.

Considerando una spira sufficientemente piccola affinché \vec{B} sia costante, sarà



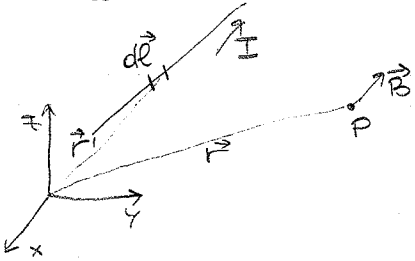
$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

$$U_m = -I \vec{B} \cdot \vec{S} = -\underline{I\vec{S}} \cdot \vec{B} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

che ha la stessa forma dell'energia di un dipolo elettrico immerso in un campo elettrico.

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Legge di Biot-Savart

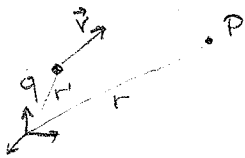


$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}' \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{\text{circuito}} \frac{d\vec{l}' \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

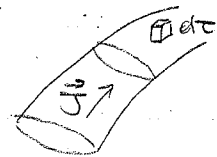


$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

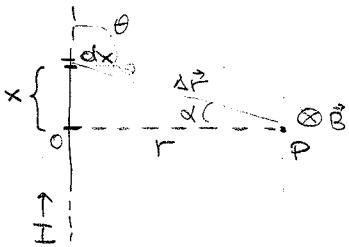
Queste leggi non tengono conto dello spessore del filo o delle dimensioni della carica.

Per fili di diametro non trascurabile si sfrutta la densità di corrente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dt'$$



Campo magnetico di un filo infinito:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dx \wedge \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3}$$

$$\begin{cases} x = r \tan \alpha \\ dx = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha \end{cases}$$

$$\Delta r = \frac{r}{\cos \alpha}$$

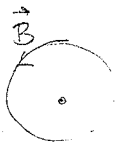
$$\sin \theta = \cos \alpha$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha \cos \alpha \frac{\cos \alpha}{r^2}$$

$$B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

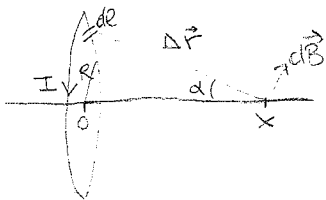


Calcolando la circolazione di \vec{B} lungo una circonferenza di centro la filo e ortogonale allo stesso



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Campo magnetico di una spira lungo il proprio asse:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3}$$

Le componenti dei $d\vec{B}$ ortogonali all'asse si cancellano, mentre quelli paralleli si sommano...

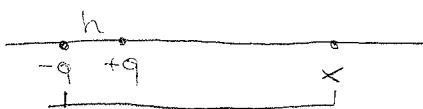
$$\Delta r = \sqrt{R^2 + x^2} \quad \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2 + x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \mu_0$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{24\pi} \frac{\pi R^2}{(R^2 + x^2)\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\pi R^2}{[R^2 + x^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{[R^2 + x^2]^{3/2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{x^3}$$

In analogia con le dipole elettrico



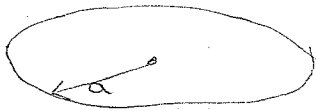
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x-h)^2} - \frac{q}{x^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x^2 - x^2 + 2xh - h^2}{x^2(x-h)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2xh}{x^4} = \frac{qh}{2\pi x^3 \epsilon_0} = \frac{p}{x^3} \frac{1}{2\pi\epsilon_0}$$

Introduzione al Magnetismo:

Esperimento di Tolman - Stewart (1916)



$$\begin{aligned} \odot & S \\ \otimes & b \ll a \end{aligned}$$

Inizialmente l'anello gira con velocità ω . Veniva poi arrestato istantaneamente.

Per un po' di tempo dopo l'arresto si misurava una corrente all'interno dell'anello conduttore.

Nel modello di Drude:

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{m\nu}{1} \vec{v}$$

termine dissipativo.

Velocità limite

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{lim} = \frac{\vec{F}}{m\nu}$$

Dato un campo elettrico \vec{E} , la velocità limite è

$$\vec{v}_{lim} = \frac{-e\vec{E}}{m\nu} \quad \text{perché} \quad \vec{F} = -e\vec{E}$$

La densità di corrente

$$\vec{J} = -en\vec{v}_{lim} = \frac{e^2 n \vec{E}}{m\nu} = \frac{\sigma}{1} \vec{E}$$

Conducibilità.

$$\nu = \frac{e^2 n}{m\sigma}$$

$$\nu \approx \frac{8.5 \times 10^{28} (1.6 \times 10^{-19})^2}{9.1 \times 10^{-31} \cdot 10^7} \approx 2.4 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

Al momento dell'arresto dell'anello

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m\nu \vec{v}$$

$$v_0 = \omega_0 a$$

$$v = v_0 e^{-\nu t}$$

$$\frac{d\vec{v}}{v} = -\nu dt$$

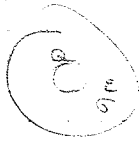
$$I = \vec{J} \cdot \vec{S} = -ensv(t) = -ensv_0 e^{-\nu t} = I_0 e^{-\nu t}$$

dove $I_0 = -en v_0 S$

$$Q = \int_0^{+\infty} I(t) dt = -\frac{I_0}{\nu} e^{-\nu t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{I_0}{\nu}$$

$$= \frac{k \nu v_0 s m \sigma}{e^2 \nu} = \frac{m}{e} v_0 \sigma$$

Condensatore sferico imperfetto



Calcolare il tempo di scarica del condensatore

$$Q(t) =$$

$$Q(0) = Q_0$$

$$E(r, t) = \frac{Q(t)}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$J(r, t) = \sigma E = \frac{\sigma Q(t)}{4\pi \epsilon r^2}$$

$$J = \sigma E \quad (\text{legge di Ohm})$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -I = -4\pi r^2 J = 4\pi r^2 \sigma E$$

$$= -\frac{\sigma}{\epsilon} Q(t)$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \quad \text{con } \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

La potenza dissipata è

$$P_d(t) = \int_{\text{volume}} J E dt' = \sigma \int_{\text{volume}} E^2(r, t) dt'$$

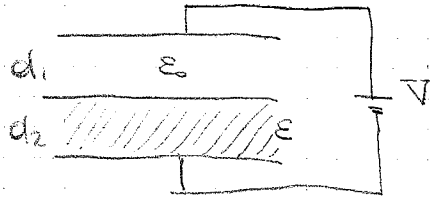
$$= \sigma e^{-2t/\tau} \int_{\text{vol}} E^2(r, 0) dt'$$

$$E(r, t) = \frac{Q_0 e^{-t/\tau}}{4\pi \epsilon_0 r^2} = E(r, 0) e^{-t/\tau}$$

L'energia elettrostatica è

$$U_{es} = \frac{\epsilon}{2} \int E^2(r, t) dt = \frac{\epsilon}{2} \frac{P_d(t)}{\sigma}$$

$$\frac{dU_{es}}{dt} = \frac{\epsilon}{2\sigma} \left(-\frac{2}{\tau} \right) P_d(t) = -P_d$$



$$\begin{cases} V = E_1 d_1 + E_2 d_2 \\ \epsilon_0 E_1 = \epsilon E_2 \end{cases} \quad \parallel D_i = \epsilon_i E_i$$

$$E_2 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_1$$

$$\begin{aligned} V &= E_1 d_1 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_1 d_2 \\ &= E_1 \left(d_1 + \frac{\epsilon_0 d_2}{\epsilon} \right) \end{aligned}$$

$$E_1 = \frac{V \epsilon}{d_1 \epsilon + \epsilon_0 d_2}$$

$$E_2 = \frac{V \epsilon_0}{\epsilon d_1 + \epsilon_0 d_2}$$

Una scarica fa diventare il mezzo 1 un conduttore
Trovare il campo elettrico sulla superficie di separazione.

$$E_1 = 0 \quad E_2 = \frac{V}{d_2}$$

Densità superficiale tra d_1 e d_2

$$\sigma_s = \mathcal{D}(D_2 - D_1) = \mathcal{S}(\epsilon E_2 - \epsilon_0 E_1) \quad \text{ma } E_1 = 0$$

$$\sigma_s = \mathcal{S} \epsilon E_2$$

$$\sigma = \epsilon E_2 = \frac{\epsilon V}{d_2}$$

$$\sigma(t) =$$

$$\frac{dq}{dt} = I, \quad \frac{d\sigma}{dt} = J = \sigma E_1$$

Si trova $E_1 = E_1(\sigma)$ e

si ottiene un'equazione per

$$\sigma(t)$$

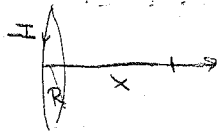
$$\begin{cases} \sigma = (\epsilon E_2 - \epsilon_0 E_1) \\ V = (d_1 E_1 + d_2 E_2) \end{cases}$$

$$E_2 = \frac{V}{d_2} - \frac{d_1}{d_2} E_1 \quad \text{e si mette nella prima}$$

Pisa 19 Novembre 2007

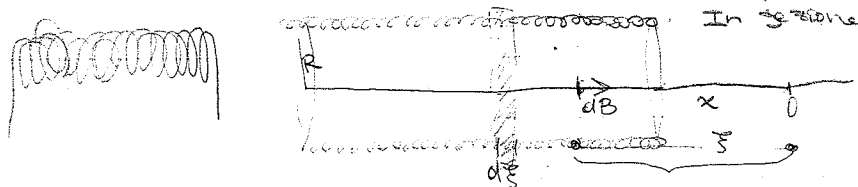
Campi Magnetici:

Campo Magnetico di una spira



$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

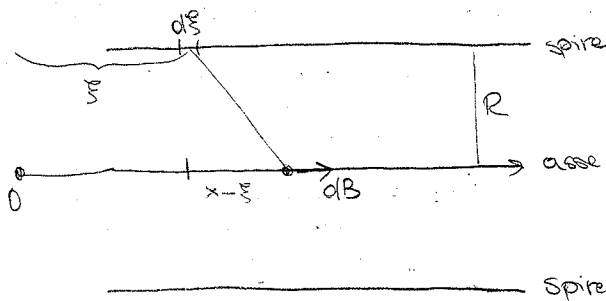
Campo magnetico del solenoide



n spire per unità di lunghezza

in $d\xi$ ci sono $n d\xi$ spire $dI = I n d\xi$

$$dB = \frac{\mu_0 I n d\xi R^2}{2[R^2 + (x - \xi)^2]^{3/2}}$$



$$R = (x - \xi) \tan \theta$$

$$\Rightarrow x - \xi = \frac{R}{\tan \theta}$$

$$-d\xi = -\frac{R}{\tan^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \Rightarrow d\xi = \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta}$$

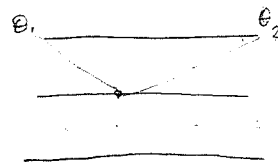
$$R^2 + (x - \xi)^2 = R^2 + \frac{R^2}{\tan^2 \theta} = R^2 \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}\right)$$

$$= R^2 \left(1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}\right) = \frac{R^2}{\sin^2 \theta}$$

Sostituendo

$$dB = \frac{\mu_0 I n R^2}{2} \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\frac{R^2}{\sin^2 \theta}}$$

$$= \frac{\mu_0 I n}{2} \sin \theta d\theta$$



$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \cdot \frac{\mu_0 I n}{2} = \frac{\mu_0 I n}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

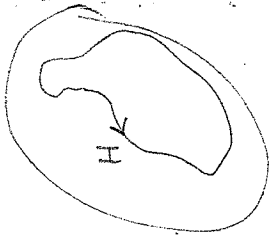
Per un solenoide infinito $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$, perciò

$$B = \mu_0 n I$$

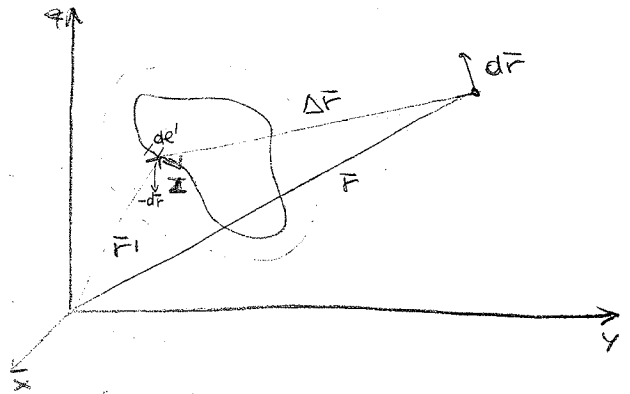
Potenziali Magnetici:

Il campo magnetico non è irrotazionale.

Tuttavia può esistere un potenziale in un dominio dello spazio a condizione che esso sia semplicemente connesso (qualsiasi cammino chiuso si riduce con continuità a un punto)



Nella regione esterna a una sfera che contiene il circuito si può definire un potenziale scalare.



$$\vec{B} = -\vec{\nabla} \varphi$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{r} = -d\varphi$$

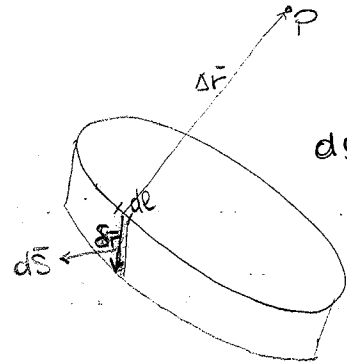
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}' \wedge \Delta \vec{r}}{\Delta r^3}$$

$$-d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}' \wedge \Delta \vec{r}}{\Delta r^3} \cdot d\vec{r} \rightarrow d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}' \wedge \Delta \vec{r}}{\Delta r^3} \cdot (-d\vec{r})$$

posto $\delta \vec{r} = -d\vec{r}$

$$d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}' \wedge \Delta \vec{r}}{\Delta r^3} \cdot \delta \vec{r}$$

$$d\vec{l}' \wedge \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r^3} \cdot \delta \vec{r} = \delta \vec{r} \wedge d\vec{l}' \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r^3}$$



$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \hat{r}}{\Delta r^2}$$

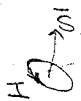
= l'angolo solido sotto il quale P vede l'elemento di superficie $d\vec{S}$

$$d\varphi = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega$$

dove $d\Omega$ è la variazione dell'angolo solido sotto il quale vedo la spira quando mi sposto di $-d\vec{r} = \delta \vec{r}$

$$\varphi = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega + c$$

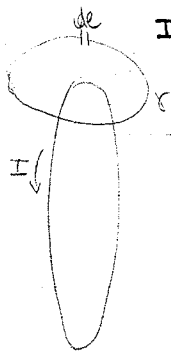
Potenziale di una piccola spira.



$$\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

molto simile a

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$



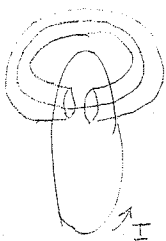
In un circuito concatenato al circuito non posso trovare un dominio



$$\oint_Y \vec{B} \cdot d\vec{e}$$

semplicemente connesso

Posso però tagliare una fetta al toro, e quindi riottenere un dominio semplicemente connesso



Nel limite in cui la fetta è infinitamente sottile ha ridefinito la circolazione

$$\begin{aligned} \oint_Y \vec{B} \cdot d\vec{e} &= -\int \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{e} = \varphi_i - \varphi_f = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{\Omega_f}{2\pi} - \frac{\Omega_i}{2\pi} \right) \\ &= \oint_Y \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I \end{aligned}$$

Teorema della circolazione di Ampère

$$\oint_Y \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I \quad \text{dove } I \text{ è la corrente concatenata al percorso chiuso } Y$$

Se la sezione del filo non è trascurabile

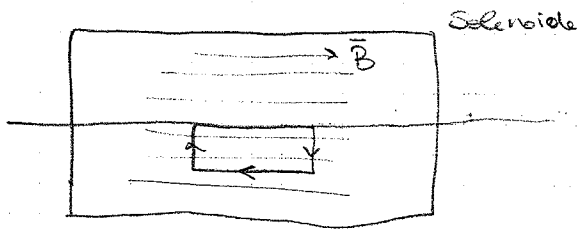
$$\oint_Y \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Passando in forma differenziale mediante il teorema di Stokes

$$\oint_Y \vec{B} \cdot d\vec{e} = \int (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Segue che

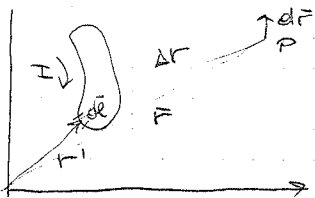
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{quarta equazione di Maxwell})$$



In un solenoide infinito
il campo magnetico deve
essere costante, in modo
che la circolazione del
campo sia nulla

Potenziale Vettore:

E' valido anche per correnti variabili nel tempo.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{e}' \wedge \Delta \vec{F}}{\Delta r^3}$$

$$\frac{\Delta \vec{F}}{\Delta r^3} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{\Delta r} \right)$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r_i} \quad i=1,2,3$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\Delta r} \right) \wedge d\vec{e}'$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{d\vec{e}'}{\Delta r} \right) = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\Delta r} \right) \wedge d\vec{e}' + \frac{1}{\Delta r} \underbrace{\vec{\nabla} \wedge d\vec{e}'}_0$$

perché $d\vec{e}'$ non dipende
da P

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{d\vec{e}'}{\Delta r} \right) \right)$$

perché $d\vec{e}'$ non dipende dalle coordinate
di P , porto fuori il $\vec{\nabla}$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla} \wedge \oint \frac{d\vec{e}'}{\Delta r}$$

$$= \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{e}'}{\Delta r} \right)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

dove \vec{A} è il potenziale vettore del campo magnetico.

$$\vec{A} \stackrel{def}{=} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{e}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \quad (\text{seconda eq. di Maxwell})$$

Pisa, 20 Novembre 2007

Potenziali Magnetici

Si è osservato che, definito il potenziale vettore \vec{A} , si ha

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$$

Il potenziale A è definito a meno di costanti vettoriali e gradienti di funzioni scalari arbitrarie

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{C} + \nabla f$$

$$\nabla \wedge \vec{A}' = \nabla \wedge \vec{A} + \underbrace{\nabla \wedge \vec{C}}_0 + \underbrace{\nabla \wedge (\nabla f)}_0$$

$$= \nabla \wedge \vec{A}$$

È possibile scegliere la funzione f in modo tale che il potenziale vettore si annulli in un punto (che si annulla) $(\nabla \cdot \vec{A} \text{ in tutto } \mathbb{R}^3)$

La trasformazione del potenziale vettore è detta trasformazione di gauge.

Per la circuitazione del campo magnetico in forma locale (IV equazione di Maxwell)

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} +$$

$$- \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= -\nabla^2 \vec{A} + \underbrace{\nabla \times (\nabla \cdot \vec{A})}_0$$

$$= -\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A}_x = \mu_0 J_x \\ \nabla^2 \vec{A}_y = \mu_0 J_y \\ \nabla^2 \vec{A}_z = \mu_0 J_z \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sono tre equazioni di} \\ \text{Poisson} \end{array}$$

Ciascuna di queste equazioni sono analoghe a quella trattata per il potenziale elettrostatico

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Per \vec{J} nota

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} dt'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{per densità volumiche di corrente}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{e}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{per un circuito filiforme}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_s \cdot d\vec{S}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Per il teorema di Stokes:

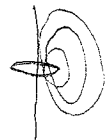
$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{e}$$



$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0$$

Il flusso del campo magnetico è nullo attraverso una superficie chiusa.

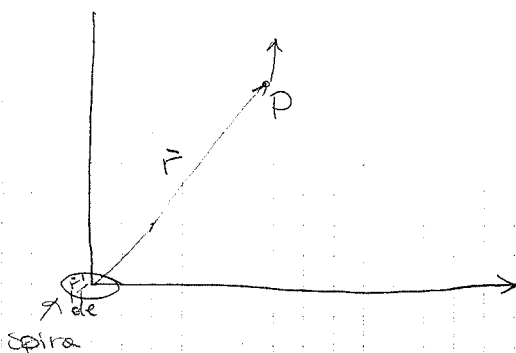
Ne consegue che le linee di forza del campo magnetico sono sempre chiuse.



Potenziale vettore di un dipolo magnetico:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{e}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

abbiamo dunque calcolare un integrale di una funzione scalare del tipo

$$\oint \frac{d\vec{e}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$


Perciò non siamo esattamente alle prese con una circuitazione.

Sia per questo $\vec{\omega}$ un vettore costante in ogni punto dello spazio

$$\oint (\mathcal{F} \vec{\omega}) \cdot d\vec{e} = \int \vec{\nabla} \wedge (\mathcal{F} \vec{\omega}) \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\mathcal{F} \vec{\omega}) = \vec{\nabla} \mathcal{F} \wedge \vec{\omega} + \mathcal{F} (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega})$$

0 perché $\vec{\omega}$ è un vettore uniforme e costante.

$$\int \vec{\nabla} \wedge (\mathcal{F} \vec{\omega}) = \int (\vec{\nabla} \mathcal{F} \wedge \vec{\omega}) \cdot d\vec{S}$$

$$\oint (\mathcal{F} \vec{\omega}) \cdot d\vec{e} = \int (\vec{\nabla} \mathcal{F} \wedge \vec{\omega}) \cdot d\vec{S}$$

||

$$\vec{\omega} \cdot \oint \mathcal{F} d\vec{e} = - \int \vec{\omega} \cdot (\vec{\nabla} \mathcal{F} \wedge d\vec{S})$$

Segue che

$$\vec{\omega} \cdot \oint \mathcal{F} d\vec{e} = - \vec{\omega} \int \vec{\nabla} \mathcal{F} \wedge d\vec{S}$$

$$\text{Perciò } \oint \mathcal{F} d\vec{e} = - \int \vec{\nabla} \mathcal{F} \wedge d\vec{S}$$

Nel nostro caso

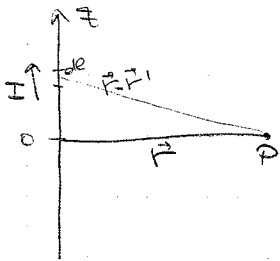
$$\mathcal{F} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \vec{\nabla} \mathcal{F} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{A} = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \wedge d\vec{S}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\vec{S} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{dove si è fatto uso di } r' \ll r$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \vec{S} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \hat{r}}{r^2}$$

Potenziale vettore di un filo infinito



$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{z}}{|\vec{r}-\vec{z}|}$$

$$= 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = \ln|z + \sqrt{z^2+r^2}| + c$$

= l'integrale diverge

Rimangono però definite le differenze dei potenziali tra due punti

$$\vec{A}(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}) - A(\vec{r}_0)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{+\infty} dz \left[\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2+z^2}} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\log \frac{z + \sqrt{z^2+r^2}}{z + \sqrt{z^2+r_0^2}} \right]_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$$

Si usa lo stesso stratagemma per fissare le potenziali elettrostatiche di un filo carico infinito per Gauss

$$2\pi r \lambda \epsilon_0 E = \frac{\lambda K}{\epsilon_0} \quad E = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

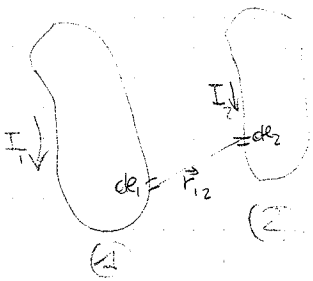
$$V = -\frac{1}{2\pi \epsilon_0} \lambda \ln(r) + C$$

Fissando una superficie a potenziale nullo

$$C = \frac{1}{2\pi} \epsilon_0 \lambda \ln(r_0)$$

$$\Rightarrow V = -\frac{1}{2\pi \epsilon_0} \lambda \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

Se abbiamo due circuiti percorsi da corrente, uno risentirà del campo magnetico generato dall'altro.

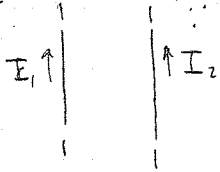


$$dF_{21} = I_2 d\vec{z}_2 \wedge \vec{B}_1 = I_2 d\vec{z}_2 \wedge \oint \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\vec{z}_1 \wedge \vec{r}_{21}}{r_{21}^3}$$

$$F_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{z}_2 \wedge (d\vec{z}_1 \wedge \vec{r}_{21})}{r_{21}^3}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

Forze tra due fili infiniti

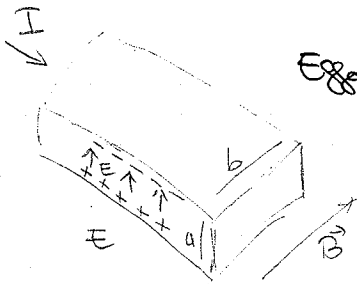


$$\frac{dF_{21}}{dl_2} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} \hat{r}_{12}$$

La definizione pratica di Ampère è data in base a questa relazione.

1 A è la corrente che deve scorrere in due fili paralleli infiniti perché si attraggano con una forza di

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{N}{m} \right)$$



Effetto Hall

$$qE_s = qv_d B \quad \text{all'equilibrio}$$

$$E_s = v_d B$$

Comparirà una differenza di potenziale tra le superfici inferiore e superiore del conduttore

$$\Delta V = E_s a = v_d B a$$

$$I = \vec{J} \cdot ab = nq v_d ab \quad \Rightarrow \quad v_d = \frac{I}{nqab}$$

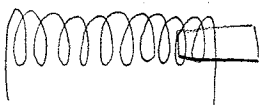
$$\Delta V = \frac{1}{nq} \frac{IB}{b}$$

$$\frac{1}{nq} = R_H \quad \text{costante di Hall (caratteristica del materiale)}$$

$$\Delta V = R_H \frac{IB}{b}$$

Conoscendo I e ΔV si risale al campo magnetico.

Magnetismo nella materia



Alcuni materiali vengono attratti con forza

Fe, Co, Ni → ferromagnetici

Altri vengono attratti debolmente

Al, Pt, Cr → Paramagnetici

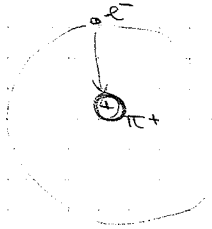
Altri vengono respinti

NaCl, Cu, Pb → Diamagnetici.

Pisa 26 Novembre 2007

Magnetismo nella Materia

Nel modello atomico planetario di Rutherford:



$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m_e \omega^2 r = m_e \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

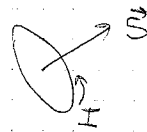
$$T = \frac{4\pi}{e} \sqrt{\pi\epsilon_0 m_e r^3} \approx 1.5 \times 10^{-16} \text{ s}$$

$$r \approx 0.5 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (\text{raggio di Bohr})$$

$$I \approx \frac{e}{T} \approx 1 \text{ mA}$$

L'atomo di idrogeno si comporta come una spira, ed ha quindi un momento magnetico

$$\vec{m} = I \vec{S} \approx 9.3 \times 10^{-24} \text{ Am}^2$$



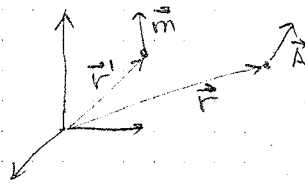
Se Z è pari, i momenti magnetici tendono a scomparire.
Se Z è dispari, c'è sempre un momento magnetico non nullo.

Viene definita la magnetizzazione \vec{M} come momento magnetico per unità di volume.

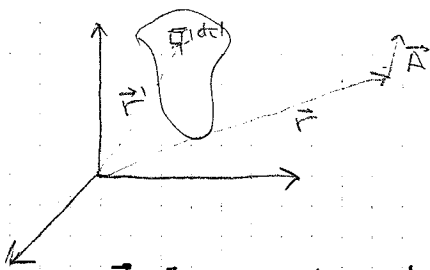
$$\vec{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta\tau}$$

Ricordiamo che il ^{potenziale vettore del} campo magnetico generato da una spira di momento magnetico \vec{m} è

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



Estendendo il ragionamento a un volume



$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot d\tau' \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M} \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{r}') \wedge \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\tau'$$

Usando la identità

$$\vec{\nabla} \wedge (f \vec{v}) = f (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) + \vec{\nabla} f \wedge \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{\nabla} f = f \vec{\nabla} \wedge \vec{v} - \vec{\nabla} \wedge (f \vec{v})$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \wedge \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dt' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla}' \wedge \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dt'$$

Vogliamo ora trasformare il secondo termine sfruttando
 $\int \vec{\nabla} \wedge \vec{v} dt = - \oint \vec{v} \wedge d\vec{S}$ con \vec{v} unif. e costante

$$\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) - \vec{\omega} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$$

" per unif. e cost.

$$\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{v}) = \vec{\omega} \cdot (\nabla \wedge \vec{v})$$

$$\int \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{v}) dt = - \int \vec{\omega} \cdot (\nabla \wedge \vec{v}) dt$$

" per Gauss " "

$$\oint (\vec{\omega} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{S} = - \vec{\omega} \cdot \int \vec{\nabla} \wedge \vec{v} dt$$

$$\oint \vec{\omega} \cdot (\vec{v} \wedge d\vec{S}) = - \vec{\omega} \cdot \int \vec{\nabla} \wedge \vec{v} dt$$

$$\vec{\omega} \cdot \oint \vec{v} \wedge d\vec{S} = - \vec{\omega} \cdot \int \vec{\nabla} \wedge \vec{v} dt$$

$$\Rightarrow \oint \vec{v} \wedge d\vec{S} = - \int \nabla \wedge \vec{v} dt$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \wedge \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dt' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{M}(\vec{r}') \wedge d\vec{S}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Ma sappiamo che

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \cdot dt'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Immaginando un cilindro di materiale



All'interno le correnti si cancellano, ma sulla superficie c'è una corrente superficiale di magnetizzazione.

Se la magnetizzazione non è uniforme possono anche comparire delle correnti volumiche, come quando la polarizzazione non è uniforme e si hanno densità volumiche di carica.

Allora

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \cdot d\vec{t}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_{mv} \cdot d\vec{t}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_{ms} \cdot d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

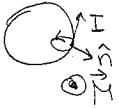
dove

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \wedge \hat{n}$$

$$\vec{J}_{mv} = \nabla \wedge \vec{M}$$

densità
corrente magnetica superficiale

densità di corrente volumica



Equazioni di Maxwell per campi stazionari:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m)$$

dove \vec{J}_m è la corrente di magnetizzazione. $\vec{J}_{mv} = \nabla \wedge \vec{M}$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 (\nabla \wedge \vec{M})$$

$$\nabla \wedge \vec{B} - \mu_0 (\nabla \wedge \vec{M}) = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \wedge \left(\frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

Si introduce allora un vettore campo magnetico \vec{H}

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0}$$

non è magnetizzazione

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Per cui la IV eq. di Maxwell diventa

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J}$$

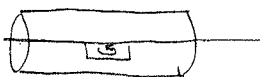
Notiamo la somiglianza

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

In un solenoide infinito

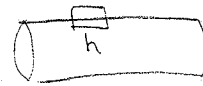
$$B = \mu_0 I n \quad \Rightarrow \quad H = n I \quad (\text{Ampère spira/m})$$



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{e} = 0$$

\Rightarrow H è costante all'interno del solenoide infinito.

Se si calcola la circolazione sul bordo



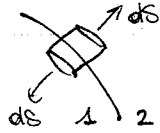
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = n I h$$

il campo è dunque nullo all'esterno del solenoide

Passando da un materiale a un altro, si usano le equazioni di Maxwell per creare un raccordo.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}$$



Per Gauss

$$B_{1\perp} = B_{2\perp}$$

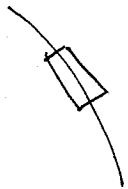
Risultato sperimentale: se il mezzo è isotropo e omogeneo

\vec{B} è proporzionale a \vec{H}

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$$

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

μ può essere ≥ 1
che spiega para e dia magnetismo



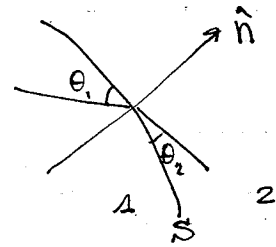
Per la circolazione, se ci sono solo correnti di magnetizzazione, esse non rientrano nel calcolo di $\vec{\nabla} \wedge \vec{H}$, che deve dunque essere nullo. Segue che

$$H_{1\parallel} = H_{2\parallel}$$

$$\rightarrow \frac{B_{1\parallel}}{\mu_1} = \frac{B_{2\parallel}}{\mu_2}$$

$$\mu_1 B_{1\parallel} = B_{2\parallel} \mu_2$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$



Definiamo la suscettività magnetica

$$\boxed{\chi_m = \mu_r - 1}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 \mu_r \vec{H} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0}$$

$$= \mu_r \vec{H} - \vec{M}$$

$$\vec{M} = \mu_r \vec{H} - \vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} = \chi_m \vec{H}$$

$$\mu \vec{M} = \chi_m \mu \vec{H} = \chi_m \vec{B}$$

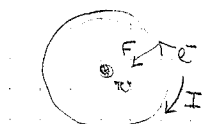
Pisa 27 Novembre 2007

Magnetismo nel microscopico:

Per i materiali diamagnetici, $\chi_m < 0$ è in valore assoluto

$$10^{-9} < |\chi_m| < 10^{-6}$$

Riprendendo il modello dell'atomo di Rutherford immerso in un campo magnetico uniforme:



$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m_e \omega^2 r \quad \text{senza campo magnetico}$$



$$\vec{f}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad |\vec{f}_L| = e \omega r B$$

Si fa l'ipotesi che il raggio dell'orbita non cambi ma cambi solo la velocità propria di quell'orbita.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + e \omega r B = m_e \omega^2 r \quad (\text{con campo})$$

Sottraendo membro a membro le equazioni con e senza campo magnetico

$$\begin{aligned} e \omega r B &= m_e r (\omega^2 - \omega_0^2) \\ &= m_e r (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

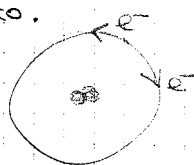
La variazione di ω , $\Delta\omega$, è piccola rispetto a ω_0 , perciò

$$e \omega_0 r B = m_e r \Delta\omega \cdot 2\omega_0 \quad \text{per } (\omega \approx \omega_0)$$

$$eB = 2m_e \Delta\omega \Rightarrow \Delta\omega = \frac{eB}{2m_e}$$

Se il momento magnetico dell'atomo è parallelo al campo, il momento magnetico aumenta.

Per un atomo di elio, si avrà che il momento magnetico di un elettrone diminuisce, mentre aumenta quello dell'elettrone di spin opposto. I momenti magnetici quindi non si cancellano più e compare un momento magnetico netto.



$$\vec{m} = -\frac{e}{T} \pi r^2 \vec{v} = -e \frac{\omega}{2\pi} \pi r^2 \vec{v} = -\frac{e \omega r^2}{2} \vec{v}$$

$$\vec{L} = m_e \omega r^2 \vec{v} \Rightarrow \omega = \frac{\vec{L}}{m_e r^2}$$

momento angolare dell'elettrone.

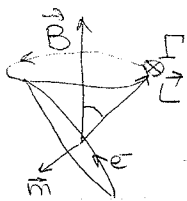
$$\vec{m} = -\frac{e\hbar^2}{2} \frac{\vec{L}}{m_e \hbar^2} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

$\frac{e}{2m_e}$ è detto fattore giromagnetico ed è un fattore di proporzionalità tra momento magnetico e momento angolare.

Effetto Zeeman:

Variatione della frequenza della radiazione emessa da un atomo in presenza di un campo magnetico.

Tipicamente si osservava che ogni banda si divideva in tre bande, corrispondenti agli elettroni con momento angolare perpendicolare, parallelo o antiparallelo rispetto al campo magnetico.



$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

$$\vec{G} = \vec{m} \wedge \vec{B} \quad \text{momento meccanico}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{G} = \vec{m} \wedge \vec{B} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} \wedge \vec{B}$$

$\frac{d\vec{L}}{dt}$ è perpendicolare a \vec{L} , che quindi non cambia in moduli.

È anche perpendicolare a \vec{B} , c'è perciò un moto di precessione.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_L \wedge \vec{L} \quad \text{dove } \omega_L \text{ è detta frequenza di Larmor.}$$

$$\vec{\omega}_L = \frac{e}{2m_e} \vec{B} \quad \text{ed è ricomparso il fattore giromagnetico.}$$

La precessione di Larmor dà vita alle correnti di Larmor

$$I_L = -\frac{e}{T_L} = -\frac{e\omega_L}{2\pi} = -\frac{e^2}{4\pi m_e} B$$

Si ottiene così un momento magnetico, considerando la proiezione sul piano ortogonale al vettore campo magnetico della superficie dell'orbita dell'elettrone.

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{1}{3} r^2$$

$$S_z = \pi(\overline{x^2} + \overline{y^2})$$

$$m_L = -\frac{e^2}{4\pi m_e} B \pi \frac{2}{3} r^2 = -\frac{e^2 r^2}{6 m_e} B$$

Per ottenere $\omega_L \sim \omega_0$ occorre $B \sim 5 \times 10^5 \text{ T}$

Materiali Paramagnetici:

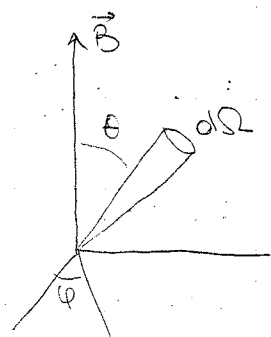
$$\mu_r > 1 \quad \chi_m > 0 \quad \chi_m \sim 10^{-6}$$

È un momento magnetico permanente m_0 perché gli atomi hanno un numero dispari di elettroni.

In presenza di un campo magnetico esterno si ha una magnetizzazione per orientamento.

L'energia potenziale ha la forma

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$



Senza campo magnetico esterno, la probabilità di avere una magnetizzazione in una data direzione è proporzionale all'angolo solido $d\Omega$ che si considera.

In presenza di campo magnetico la distribuzione di probabilità è uniforme in φ , ma non in θ (con $\vec{B} = B \hat{z}$), e ha la forma

$$dW = A e^{\frac{m_0 B \cos\theta}{k_B T}} d\Omega$$

↳ costante di normalizzazione

$$= A e^{\frac{m_0 B \cos\theta}{kT}} 2\pi \sin\theta d\theta$$

statistica di Boltzmann

$$A = \frac{1}{\int_0^\pi e^{\frac{m_0 B \cos\theta}{kT}} 2\pi \sin\theta d\theta}$$

$$\overline{m_z} = \frac{\int_0^\pi m_0 \cos\theta e^{\frac{m_0 B \cos\theta}{kT}} 2\pi \sin\theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\frac{m_0 B \cos\theta}{kT}} 2\pi \sin\theta d\theta}$$

ponendo $\frac{m_0 B}{kT} = y$

$$\cos\theta = x$$

$$dx = -\sin\theta d\theta$$

$$\overline{m_z} = \frac{m_0 \int_{-1}^1 e^{yx} x dx}{\int_{-1}^1 e^{yx} dx}$$

$$\int e^{yx} x dx = e^{yx} \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{y^2} \right)$$

$$e^{yx} \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{y^2} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{y} (e^y - e^{-y}) - \frac{1}{y^2} (e^y - e^{-y})$$

$$\int_{-1}^1 e^{yx} dx = \frac{1}{y} (e^y - e^{-y})$$

$$\Rightarrow \overline{m_z} = \left(\frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} - \frac{1}{y} \right) m_0$$

Funzioni Iperboliche (digressione matematica)

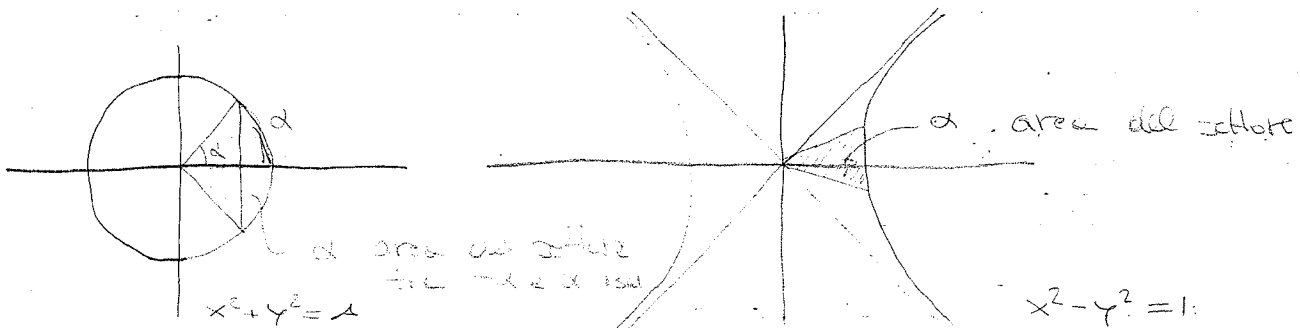
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$i \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$$\coth \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{e^\theta - e^{-\theta}} \rightarrow 1 \text{ per } \theta \rightarrow +\infty$$

→

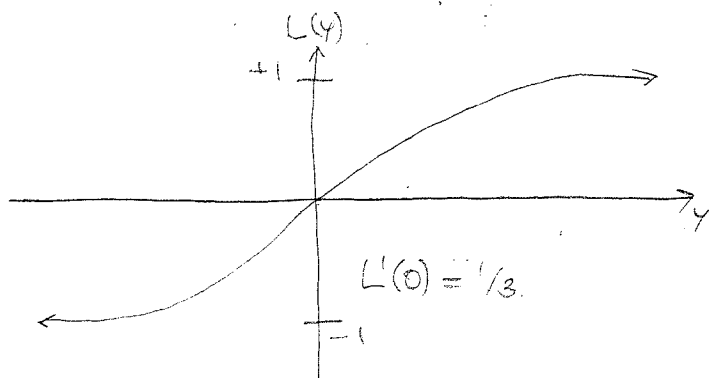
$$\overline{m_z} = m_0 \left(\coth(y) - \frac{1}{y} \right) \quad \text{funzione di Langevin}$$

$$\coth(y) \approx \frac{1}{y} + \frac{y}{3} - \frac{y^3}{45} + o(y^3)$$

Al prim' ordine

$$\overline{m_z} \approx m_0 \frac{y}{3} = \frac{m_0^2 B}{3kT}$$

$$= m_0 L(y)$$



Scrivendo $\gamma = \frac{m \cdot B}{kT}$

stiamo considerando il B locale.

Nei mezzi ferromagnetici diventa importante considerare il campo magnetico macroscopico.

Si può scrivere tutto in funzione di \vec{H}

$$\vec{H}_e = \vec{H} + \frac{1}{3} \vec{M} \quad (\text{confronta con } \vec{E}_e = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P})$$

\downarrow
locale

Sperimentalmente questa legge non vale per mezzi ferromagnetici, ma

$$\vec{H}_e = \vec{H} + \gamma \vec{M} \quad \text{Legge di Weiss}$$

$$\gamma \approx 10^3 - 10^4$$

Una spiegazione è data dai domini di Weiss, piccoli volumetti magnetizzati alla saturazione ma in direzioni diverse.

La spiegazione completa è quantistica e dovuta ad Heisenberg.

Il ferromagnetismo è dovuto all'effetto cooperativo per cui ciascun dominio è mantenuto dalla magnetizzazione degli altri e il campo magnetico si autosostiene anche in assenza di campi esterni.

Magnetismo nella materia

$M(\gamma) = n m_0 L(\gamma)$ dove $L(\gamma) = \coth(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$

$\gamma = \frac{m_0 B_e}{kT}$

La magnetizzazione è per il momento funzione di B_e , campo magnetico locale.

Vogliamo ricavare un'espressione in funzione di H .

$H_{||}$ è conservato lungo le superfici di separazione, quindi più facilmente misurabile



$H_e = H + \gamma M$

$H_e = \frac{B_e}{\mu_0}$

$M = \frac{H_e - H}{\gamma}$

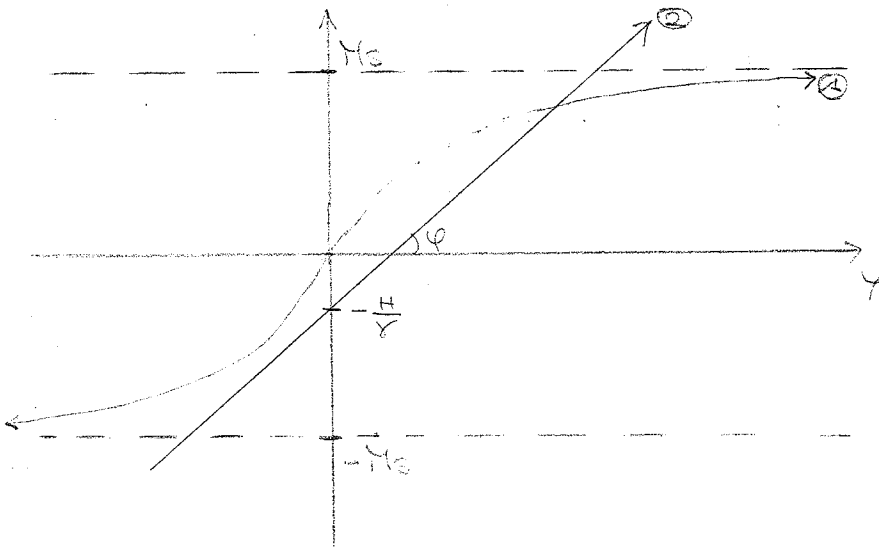
con γ costante di Weiss

$\gamma = \frac{m_0 \mu_0 H_e}{kT} \Rightarrow H_e = \frac{kT \gamma}{m_0 \mu_0}$

① $M(\gamma) = n m_0 L(\gamma)$

② $M = \frac{H_e - H}{\gamma} = \frac{H_e}{\gamma} - \frac{H}{\gamma} = \frac{kT \gamma}{\gamma m_0 \mu_0} - \frac{H}{\gamma}$

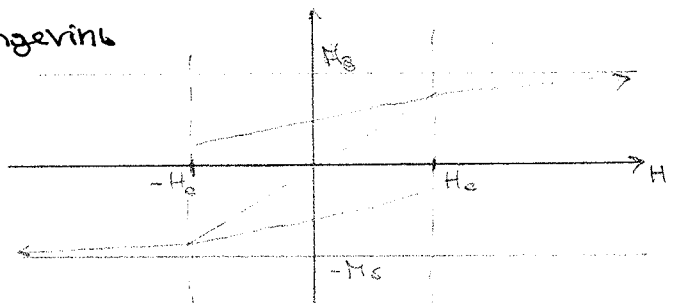
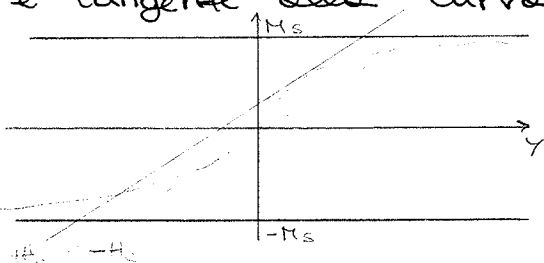
Questo sistema non si maneggia però algebricamente.



$\tan \varphi = \frac{kT}{\gamma m_0 \mu_0}$

M_s magnetizzazione di saturazione

Esiste un H_c critico per cui la curva di magnetizzazione è tangente alla curva di Langevin



Si può avere per $H = 0$ $M \neq 0$. I dipoli magnetici si stanno allora automaticamente (calamita).

Esiste inoltre una temperatura critica (o di Curie) T_c per la quale la agitazione termica vince sulla magnetizzazione (la calamita diventa ferraccio).

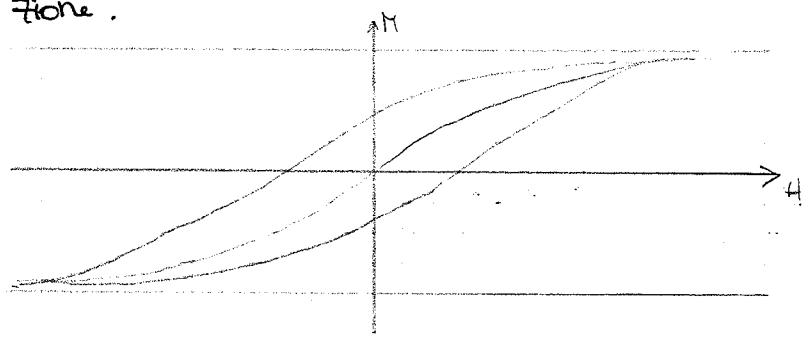
$$\frac{kT_c}{\chi \mu_0 m_0} = \frac{1}{3} \frac{M_s}{m_0 n} \Rightarrow T_c = \frac{\chi \mu_0 m_0 M_s}{3k n}$$

Si impone magnetizzazione nulla.

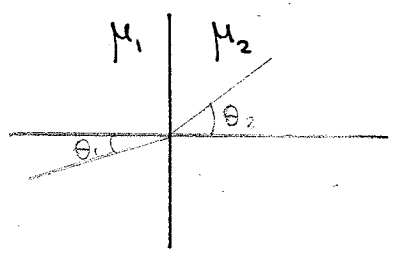
Dalla misura di T_c si può ottenere χ

Elemento	T_c (K)
Fe	1043
Co	1388
Ni	627

Rimuovendo il campo H non si ritorna a una magnetizzazione.

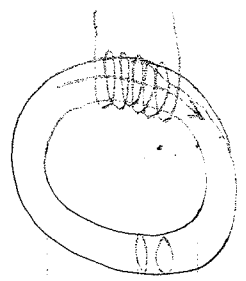


Circuiti Magnetici:



$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

In un materiale ferromagnetico le linee di B e H tendono a essere parallele alla superficie di separazione col vuoto



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$$

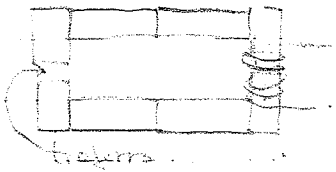
↳ numero spire

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Il flusso di B è costante lungo le sezioni

Un circuito magnetico sono dei pezzi di materiali

ferromagnetici



$$\Phi = BS \Rightarrow B = \frac{\Phi}{S}$$



$$B_1 S_1 = B_2 S_2 = \Phi$$

$$B = \mu H$$

$$NI = \oint \vec{H} \cdot d\vec{e} = \oint \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{e} = \frac{\Phi}{\mu S} \int dl$$

$$NI \equiv F$$

$$R \equiv \int \frac{dl}{\mu S}$$

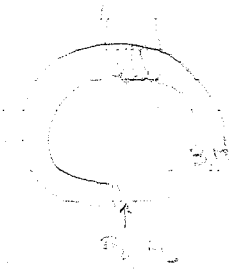
↑
reluttanza magnetica

Legge di Hopkinson

$$F = RI \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{E} = RI$$

analogia

$$R = \int \frac{dl}{\mu S} \xrightarrow{\mu, S \text{ cost.}} \frac{l}{\mu S}$$



$$B = B_0$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$$

Con un magnete permanente



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{e} = 0$$

perché non ci sono correnti concatenate

Dentro il materiale H e B devono essere antiparalleli

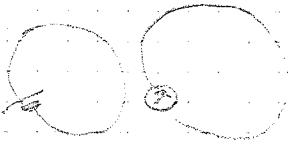


Si può introdurre una carica magnetica equivalente

$$\rho_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla} \phi_M$$

$$\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n}$$



Avvicinando e allontanando il circuito in continua si ha un passaggio di corrente nell'altra spira.

Legge di Faraday - Neumann

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

La forza elettromotrice è uguale alla variazione del flusso del campo magnetico.

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell}$$

↳ campo elettromotore indotto

$$\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{E}_i = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

La velocità degli elettroni nella spira indotta per spostamento della stessa è

$$\vec{v}_d + \vec{v}_t$$

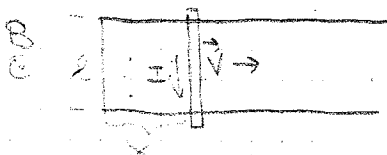
↳ velocità di trascinamento

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint (\vec{E} + (\vec{v}_d + \vec{v}_t) \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \\ &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \oint (\vec{v}_d \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} + \oint (\vec{v}_t \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \\ &\quad \text{per } \vec{v}_d \parallel d\vec{\ell} \end{aligned}$$

$$\vec{E}_i = \vec{E} + \vec{v}_t \wedge \vec{B}$$

Legge di Lenz:

Nella spira è indotta una corrente tale da opporsi alla variazione del campo magnetico.



$$E_i = vB$$

$$\mathcal{E} = -vBl$$

$$\Phi = Bex$$

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Bex) = -Bv = \mathcal{E}$$

Pisa 4 Dicembre 2007

Induzione Elettromagnetica

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{legge di Faraday - Neumann})$$

$$= \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{e} \quad \text{con} \quad \vec{E}_i = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$



Campo magnetico costante nel tempo e circuito che si muove:



$$d\Phi = \Phi_f - \Phi_i$$

detta $d\Sigma$ la superficie di raccordo non deformata tra la spira nella posizione iniziale e quella nella posizione finale

Segue che

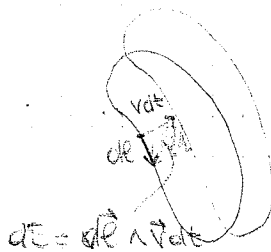
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \Phi_f - \Phi_i + \Phi_{d\Sigma} = 0$$

$$d\Phi = -\Phi_{d\Sigma} = - \int_{d\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$= - \oint_{d\Sigma} \vec{B} \cdot (d\vec{e} \wedge \vec{v}_T dt)$$

$$= - dt \oint \vec{B} \cdot (d\vec{e} \wedge \vec{v}_T)$$

$$= - dt \oint (\vec{v}_T \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{e}$$



$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint (\vec{v}_T \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{e} = - \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{e} = -\mathcal{E}$$

che è conseguenza della forza di Lorentz.

Corrente indotta da un circuito:



Se sposto il circuito alimentato ottengo lo stesso risultato, ma stavolta è conseguenza del principio di relatività.

Si può inoltre tenere fermi i due circuiti e far variare la corrente nel circuito 1.

Il risultato è ancora lo stesso, perciò dipende solo dalla variazione di Φ , quale che sia la causa che lo fa variare.

Il risultato è ancora lo stesso, perciò dipende solo dalla variazione di Φ , quale che sia la causa che lo fa variare.

La legge di Faraday-Neumann, nella forma

$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$, è una legge integrale.

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{e} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Si può però trovare una forma locale:

Consideriamo un circuito in quiete immerso in un campo magnetico variabile.

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{e} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_S \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Segue che gli integrandi devono essere uguali

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Se il circuito si muove e il campo magnetico varia

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{e} = -\frac{d}{dt} \left[\int_{S(t+dt)} \vec{B}(t+dt) \cdot d\vec{S} - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \right]$$

$$\vec{B}(t+dt) = \vec{B}(t) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt$$

$$= -\frac{1}{dt} \left[\int_{S(t+dt)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} + \int_{S(t+dt)} dt \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \right]$$

$$= -\frac{1}{dt} \left[\int_{S(t+dt)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \right] - \int_{S(t+dt)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

↑
Questo pezzo è come un circuito che si sposta in un campo costante

$$= \oint (\vec{v}_T \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{e} - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint (\vec{E}_i - \vec{v}_T \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{e} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{ma } \vec{E}_i = \vec{E} + \vec{v}_T \wedge \vec{B}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{e} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Riapplicando il teorema di Stokes:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Quest'ultimo risultato va a modificare la III equazione di Maxwell, che diventano

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

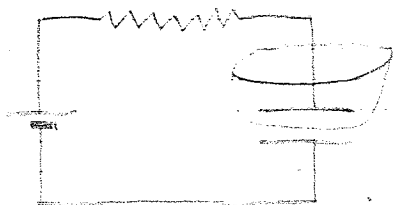
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}$$

La quarta equazione, in forma integrale è

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Consideriamo il seguente circuito.



Se applichiamo la formula precedente, troviamo che l'equazione non è più vera, perché non ci sono correnti che attraversano la superficie.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} \quad \longrightarrow \quad \text{applicando la divergenza a entrambi i membri}$$

$$\nabla \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

La divergenza di un rotore è sempre nulla. Cosa non vera per $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$, infatti

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{o, in forma integrale } \oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int \rho \, dt$$

È allora vero che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Dalla prima eq. di Maxwell: $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) = 0$$

per il teorema di Schwarz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

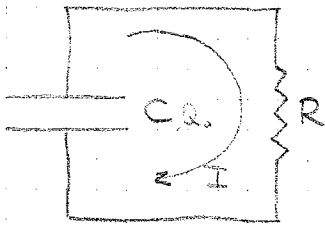
La quantità tra parentesi è uguale a J nel caso stazionario, mentre differisce nel caso dinamico, ma la sua divergenza è sempre nulla.

La forma definitiva della quarta equazione è dunque:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ prende il nome di "densità di corrente di spostamento".

Scarica di un condensatore:



$$Q = Q_0 e^{-t/RC}$$

$$I = I_0 e^{-t/RC} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow D = \sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q_0}{S} e^{-t/RC}$$

$$\vec{J}_{\text{spost}} = \frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{Q_0}{S} \frac{1}{RC} e^{-t/RC}$$

$$\vec{I}_{\text{spost}} = \vec{J}_{\text{spost}} S = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

che è esattamente uguale alla corrente che circola nel filo, risolvendo le ambiguità.

Autoinduzione:

Un circuito percorso da corrente genera un campo magnetico, che ha un flusso non nullo in ogni superficie bordata dal circuito. Se il campo magnetico è variabile, si ha il fenomeno dell'autoinduzione.

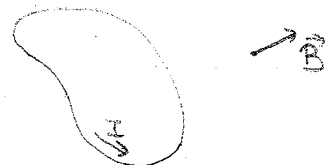
Il campo magnetico generato dalla spira percorsa da corrente varia linearmente con la corrente.

Il flusso del campo magnetico varia come

$$\Phi = LI$$

↳ coefficiente di autoinduzione o induttanza

$$[L] = \frac{\text{Weber}}{\text{Ampère}} = \frac{V \cdot s}{A} = \Omega s = \text{Henry}, H$$



Induttanza di un solenoide:



$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I \quad \text{con } N \text{ numero spire.}$$

$$\Phi = NBS$$

$$= \mu_0 \frac{N^2}{l} I S$$

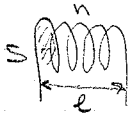
$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

Inserendo nel solenoide un materiale ferromagnetico ($\mu_r \gg 1$)

si ha che l'induttanza cresce di μ_r

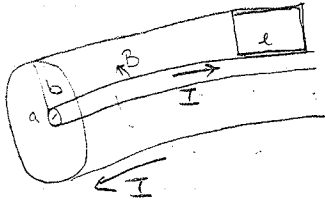
Pisa 10 Dicembre 2007

Induzione elettromagnetica:



$$L = \mu_0 n^2 l S$$

Cavi coassiali:



Servono per segnali ad alta frequenza, per limitare le perdite.

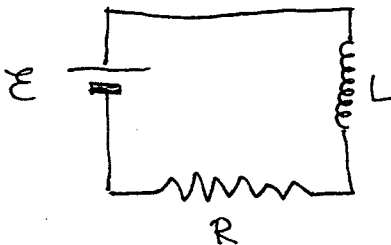
Prendendo una maglia che tocca i due conduttori, essa è attraversata dal campo magnetico \Rightarrow flusso.

Si può parlare allora di induttanza per unità di lunghezza.

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \vec{B} \cdot d\vec{S} & B &= \frac{\mu_0}{2\pi r} I \\ &= l \int_a^b \frac{I \mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{I l \mu_0}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r} dr = I \frac{l \mu_0}{2\pi} \log \frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$L = \frac{l \mu_0}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$

Circuito RL.



$$RI = \mathcal{E} + \overset{\text{autoindotta}}{\mathcal{E}_a}$$

$$\mathcal{E}_a = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{L dI}{dt} \quad L = \frac{\Phi}{I}$$

$$RI + L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}$$

$$I + \frac{L}{R} \frac{dI}{dt} = 0$$

$$I = A e^{\alpha t} \quad \dot{I} = \alpha A e^{\alpha t}$$

$$1 \cancel{A} e^{\alpha t} + \frac{L}{R} \alpha \cancel{A} e^{\alpha t} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = - \frac{R}{L}$$

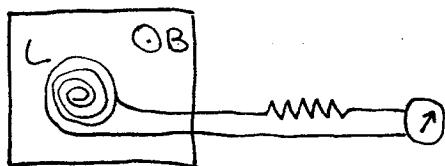
$$I = A e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} + A e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Ponendo $I(0) = 0$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$$

Questo risultato elimina la discontinuità che si avrebbe se chiudendo il circuito esso andasse istantaneamente a regime.



$$\Phi = NSB$$

Togliendo la spira rapidamente si avrà una corrente indotta

$$RI = - \underbrace{\frac{L dI}{dt}}_{\mathcal{E} \text{ autoindotta}} - \underbrace{\frac{d\Phi}{dt}}_{\mathcal{E} \text{ indotta}}$$

$$RI + L \frac{dI}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

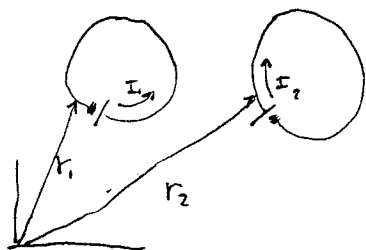
$$RI dt + L dI = - d\Phi$$

$$\int_{t_i}^{t_f} RI dt + \int_{t_i}^{t_f} L dI = - \int_{t_i}^{t_f} d\Phi$$

$$RQ + L [I_f - I_i] = \frac{\Phi_f}{0} - \frac{\Phi_i}{0} = NSB$$

$$B = \frac{RQ}{NS}$$

Mutua induzione



$$\Phi_2(B_1) = M_{21} I_1$$

$$\Phi_1(B_2) = M_{12} I_2$$

M coefficiente di mutua induzione

$$\Phi_2(B_1) = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$$

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} \quad \text{potenziale vettore} \quad \text{BI 42}$$

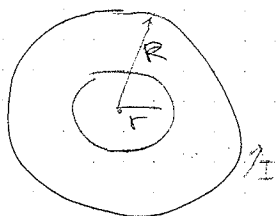
$$= \int_{S_2} (\nabla \wedge \vec{A}_1) \cdot d\vec{S}_2 \quad \stackrel{\text{Stokes}}{\uparrow} \int_{\ell_2} \vec{A}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{\ell}_2$$

$$\vec{A}_1 = \oint_{\ell_1} \frac{\mu I_1}{4\pi} \frac{d\vec{\ell}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

$$= \oint_{\ell_1} \oint_{\ell_2} \frac{I_1 \mu}{4\pi} \frac{d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Per la simmetria di questo integrale $M_{12} = M_{21}$

Esempio: Due spire concentriche

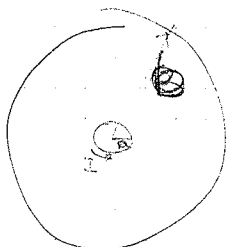


$$r \ll R$$

$$B = \frac{\mu I}{2R} \quad \text{al centro della spira}$$

$$\Phi = \frac{\mu I}{2R} \pi r^2 = M_{21} I$$

$$M_{21} = \frac{\mu \pi r^2}{2R}$$

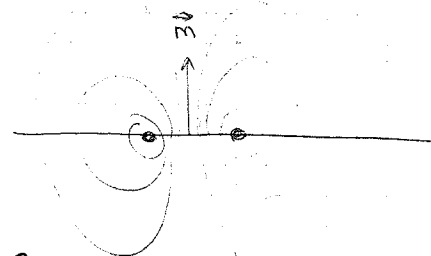


Φ sul piano è nullo perché le linee di \vec{B} sono chiuse.

Per calcolare $\Phi(R)$ si può allora calcolare $\Phi(r > R)$ e cambiare di segno.

$$r > b \gg a$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[3 \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \vec{r} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right]$$

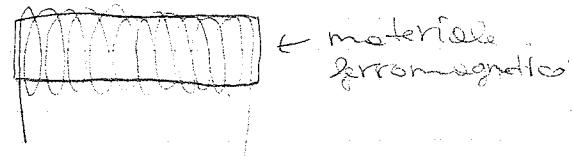


$$\Phi = 0 - \left[-\frac{\mu_0}{24\pi} \int_b^\infty \frac{\vec{m}}{r^3} 2\pi r dr \right] \quad \vec{m} = \pi a^2 I$$

$$= \frac{\mu_0 \pi a^2 I}{2} \int_b^\infty \frac{1}{r^2} dr$$

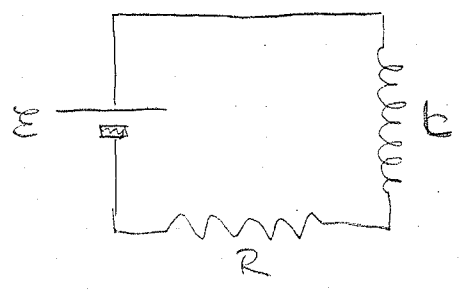
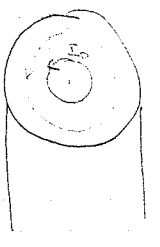
$$= \frac{\mu_0 \pi a^2 I}{2} \frac{1}{b} \Rightarrow M = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b}$$

Correnti parassite o di Foucault (eddy currents)



Se il circuito è alimentato ad alternata

si riscalda il nucleo per effetto Joule
 Si usano altre strati di materiale conduttore e isolante per bloccare le correnti parassite.



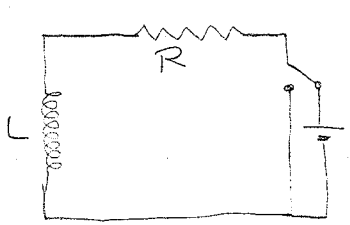
$$RI = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}$$

$$RI + L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} \quad I dt = dQ$$

$$RI^2 dt + LI dI = \mathcal{E} I dt = \mathcal{E} dQ$$

$RI^2 dt$ → energia dissipata per effetto Joule
 $LI dI$ → energia immagazzinata nel campo magnetico (nell'induttanza)
 $\mathcal{E} I dt$ → energia erogata dalla pila
 $dU_L = LI dI$

$$U_L = \int_0^I dU_L = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2$$



Quando si toglie la pila la corrente cala più lentamente.

$$RI = -L \frac{dI}{dt}$$

$$I = A e^{\alpha t}$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha A e^{\alpha t}$$

$$R A e^{\alpha t} + L \alpha A e^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha = -\frac{R}{L}$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

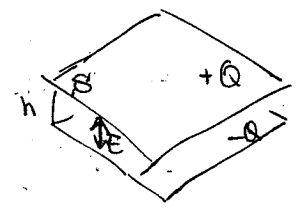
Potenza dissipata $P = RI^2 = R \left[\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \right]^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{2R}{L}t}$

Energia dissipata

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^{\infty} \omega(t) dt \\
 &= \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}t} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left[-\frac{L}{2R} e^{-\frac{2R}{L}t} \right]_0^{\infty} \\
 &= \frac{\mathcal{E}^2 L}{2R^2} = \frac{1}{2} L I_0^2
 \end{aligned}$$

che è proprio l'energia immagazzinata dall'induttanza.

$$U_L = \frac{1}{2} L I^2 \leftrightarrow U_C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$



Condensatore piano.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

$$Q = \epsilon_0 S E \quad C = \frac{\epsilon_0 S}{h}$$

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \epsilon_0^2 S^2 E^2 \frac{h}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Sh}{\tau} E^2$$

$$= \frac{1}{2} \underset{\uparrow}{V_{vol}} \epsilon_0 E^2$$

densità volumica di energia elettrostatica

$$\mathcal{E} = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}, \quad \mathcal{E}_L = LI$$

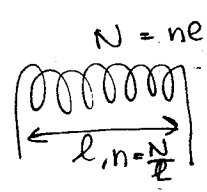
$$L \frac{dI}{dt} = + \frac{d\mathcal{E}}{dt} = NS \frac{dB}{dt}$$

$$\mathcal{E} = NS \frac{dB}{dt} + RI \quad I dt$$

$$\mathcal{E} dQ = NS dB I + RI^2 dt$$

en. fornita

en. diss.



$$\begin{aligned}
 dU_L &= I NS dB \\
 &= \mathcal{E} n I dB
 \end{aligned}$$

$$= \tau H dB \quad u_L = \frac{U_L}{\tau}$$

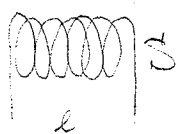
$$du_L = H dB \quad \text{per materiali isotropi} \quad H = \frac{B}{\mu}$$

$$= \frac{1}{\mu} B dB$$

$$u_L = \frac{1}{\mu} \int_0^{B_0} B dB = \frac{1}{2\mu} B_0^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

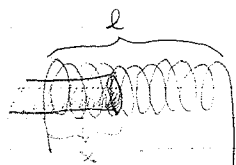
Pisa 11 Dicembre 2007

Energia immagazzinata dell'induttanza:



$$U_L = \frac{1}{2} LI^2$$

$$L = \mu n^2 l S$$



Si può vedere come due solenoidi in serie

$$L = \mu n^2 S x + \mu_0 n^2 S (l-x)$$

$$= n^2 S [\mu_0 l - \mu_0 x + \mu x]$$

$$= n^2 S [\mu_0 l + (\mu - \mu_0) x]$$

$$U_x = \frac{1}{2} I^2 n^2 S [\mu_0 l + (\mu - \mu_0) x]$$

Il generatore deve fare del lavoro per vincere la fem indotta dal materiale che entra dentro il solenoide.

Partiamo dal solenoide vuoto e come stato finale il materiale è completamente dentro.

$$\Delta U = \frac{1}{2} n^2 S I^2 l (\mu - \mu_0) \quad \left. \begin{array}{l} \text{corrente a} \\ \text{inscurate} \end{array} \right\} I = \text{costante.}$$

$$\Phi = n x \underbrace{\mu n I}_{B} S + (l-x) n \underbrace{\mu_0}_{B_0} n I S$$

$$= n^2 S I (\mu_0 l + (\mu - \mu_0) x)$$

$$\mathcal{E}_{\text{indotta}} = - \frac{d\Phi}{dt} = - n^2 S I (\mu - \mu_0) \frac{dx}{dt}$$

$$W = - \mathcal{E}_i I = n^2 S I^2 (\mu - \mu_0) \frac{dx}{dt}$$

$$\mathcal{L} = \int_0^{t_f} W dt = n^2 S I^2 (\mu_0 - \mu) \int_0^l \frac{dx}{dt} dt$$

$$= n^2 S I^2 (\mu_0 - \mu) l$$

L'energia spesa dalla batteria è doppia rispetto a quella guadagnata dal solenoide

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{\partial U}{\partial x}$$



$$R_i I_i = \mathcal{E}_i - \underbrace{L_i \frac{dI_i}{dt}}_{\text{autoinduzione}} - \underbrace{\sum_{j \neq i} M_{ij} \frac{dI_j}{dt}}_{\text{mutua induzione}}$$

ponendo $M_{ii} = L_i$

$$R_i I_i = -\sum_j M_{ij} \frac{dI_j}{dt} + \mathcal{E}_i$$

$$\mathcal{E}_i = R_i I_i + \sum_j M_{ij} \frac{dI_j}{dt} \quad \text{moltiplico per } I_i dt = dQ_i$$

$$\underbrace{\mathcal{E}_i dQ_i}_{\text{energia fornita dall'i-esimo generatore}} = \underbrace{R_i I_i^2 dt}_{\text{energia dissipata per effetto Joule nel tempo}} + \underbrace{\sum_j M_{ij} I_i dI_j}_{\text{energia immagazzinata nel campo magnetico}}$$

dU_M

Nell'ipotesi che i circuiti siano in quiete:

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j$$

$$dU_M = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} (dI_i I_j + dI_j I_i) \quad \text{per la simmetria scambiamo gli indici}$$

$$dU_M = \sum_{ij} M_{ij} I_i dI_j$$

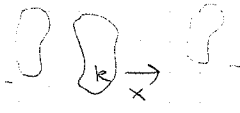
Ricordando che $\Phi_i = \sum_j M_{ij} I_j$

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_i I_i$$

Avevamo definito l'energia meccanica di un circuito come

$$U_m = - I \Phi_{est} \quad \text{dove si considerano solo i campi magnetici generati dagli altri circuiti.}$$

Se uno dei circuiti si sta spostando lungo la direzione \hat{x} (con $\frac{dI_i}{dt} = 0$)



$$\underbrace{\sum_j \mathcal{E}_j I_j dt}_{\text{energie erogate dai generatori}} = \underbrace{\sum_j R_j I_j^2 dt}_{\text{effetto Joule}} + \frac{1}{2} \sum_j I_j d\Phi_j + \int_x^{(k)} dx_k$$

$$R_j I_j = \mathcal{E}_j - \frac{d\Phi_j}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_j = R_j I_j + \frac{d\Phi_j}{dt}$$

$$\sum_j \left(R_j I_j + \frac{d\Phi_j}{dt} \right) I_j dt = \sum_j R_j I_j^2 dt + \frac{1}{2} \sum_j I_j d\Phi_j + \int_x^{(k)} dx_k$$

$$\sum_j d\Phi_j I_j dt = \frac{1}{2} \sum_j I_j d\Phi_j + \int_x^{(k)} dx_k$$

Si noti che il generatore deve fornire 2 volte l'energia immagazzinata nel campo magnetico

$$f_x^{(k)} dx = \frac{1}{2} \sum_j I_j d\Phi_j$$

$$f_x^{(k)} = \frac{\partial U_M}{\partial x_k}$$

Segue allora che, a correnti costanti

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j$$

$$\frac{\partial U_M}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial x_k} \right) I_j I_k$$

i coefficienti di mutua induzione cambiano perché il circuito k si sta muovendo.

I coefficienti con $i, j \neq k$ rimangono invariati, quindi

$$= \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_k} I_i I_k + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial M_{kj}}{\partial x_k} I_k I_j$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial M_{ik}}{\partial x_k} \right) I_i I_k$$

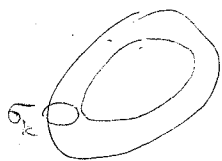
M_{kk} rimane invariato

$$= \sum_{i \neq k} \left(\frac{\partial M_{ik}}{\partial x_k} \right) I_i I_k$$

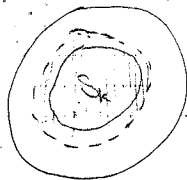
$$= \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \sum_{i \neq k} M_{ik} I_i I_k \right\} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \Phi(B_{\text{esterno}}) I_k \right\}$$

Questo risultato giustifica $U_m = -\Phi I$, perché la derivata $\frac{\partial}{\partial x_k} M_{kk} = 0$.

Consideriamo ora che i fili abbiano sezione non trascurabile



$$I_k = \int_{\sigma_k} \vec{J} \cdot d\vec{\sigma}_k$$

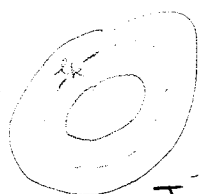


$$U_M = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \left[\int_{\sigma_k} \vec{J}_k \cdot d\vec{\sigma}_k \int_{\sigma_k} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}_k \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \left[\int_{\sigma_k} \vec{J} \cdot d\vec{\sigma}_k \int_{\sigma_k} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{\sigma}_k \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \left[\int_{\sigma_k} \vec{J} \cdot d\vec{\sigma}_k \oint_k \vec{A} \cdot d\vec{\ell}_k \right]$$



$$\vec{J}_k \parallel d\vec{\sigma}_k$$

$$\vec{J}_k \parallel d\vec{\ell}_k$$

$$U_H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \int_{\sigma_{\mathbf{k}}} d\sigma_{\mathbf{k}} \oint_{\ell_{\mathbf{k}}} dl_{\mathbf{k}} \vec{J} \cdot \vec{A}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \int_{\tau_{\mathbf{k}}} \vec{J} \cdot \vec{A} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{J} \cdot \vec{A} dt$$

dove τ è un volume arbitrario che comprende tutti i fili, perché $\vec{J} \neq 0$ solo all'interno dei fili.

Abbiamo ora un'espressione simile a $U_{el} = \frac{1}{2} \int \rho V dt$

$$U_H = \frac{1}{2} \int \vec{J} \cdot \vec{A} dt$$

Questo vale per correnti stazionarie. Per correnti variabili \vec{J} va sostituito con $\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (corrente libera più corrente di spostamento).

$$U_H = \frac{1}{2} \int (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \vec{A} dt$$

Per la quarta eq. di Maxwell $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$U_H = \frac{1}{2} \int (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{A} dt$$

Sfruttando l'identità

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \wedge \vec{A}) = (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{A} - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \wedge \vec{A}) + \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

$$U_H = \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \wedge \vec{A}) dt + \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) dt$$

per $\tau \rightarrow \infty$
(tutto lo spazio)

$$= \frac{1}{2} \oint_{\partial \tau} (\vec{H} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{H} \cdot \vec{B} dt$$

$$u_H = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad \text{energia per unità di volume.}$$

