Pisa 26 Settembre 2007

Introduzione alla Meccanica Relativistica:

All' inizio del 1900 si iniziarono a trovare dei limiti nella meccanica Newtoniana. Per esempio quest' ultima ammetteva qualsiasi velocità, mentre la relatività introduce il limite invalicabile della velocità della luce, c. Nonostante questo, nella formulazione della nuova teoria relativistica, bisognava fare attenzione affinché essa fosse equivalente alla meccanica Newtoniana nel limite in cui

$$\frac{v}{c} \longrightarrow 0 .$$

E' perciò buona regola verificare il significato fisico di questo limite in ogni problema.

Assiomi Generali della Meccanica alla fine dell' '800:

Alla fine del XIX secolo, tutta la teoria fisica della Meccanica si basava sui seguenti assiomi:

A. Esiste lo spazio assoluto, tridimensionale e isotropo (invariante per rotazione) e individuabile con il sistema di riferimento delle stelle fisse.

B. Esiste un tempo assoluto omogeneo.

C. Formulazione di Mach: Per ogni corpo esiste un coefficiente m ad esso attribuibile tale che per ogni interazione binaria sia

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

I primi due, e in particolare il secondo, non erano mai stati contestati. Da soli erano sufficienti a formulare la cinematica classica.

Il terzo ingloba in sé le tre leggi di Newton.

Questi tre assiomi danno origine alla relatività Galileiana; che governa le trasformazioni delle coordinate nei cambiamenti di sistema di riferimento inerziali:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t \\ t = t' \end{cases} \qquad (1)$$

Derivando le (1) si ricava:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} - \vec{v}t\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \qquad (2.1)$$

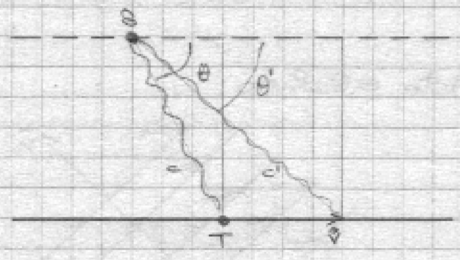
$$\frac{d\vec{u}'}{dt'} = \frac{d}{dt}\left(\vec{u} - \vec{v}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}' = \vec{a} \qquad (2.2)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}' = \vec{F} \qquad (2.3)$$

Dalle (2.2) e (2.3) segue che non è possibile distinguere due sistemi di riferimento inerziali a partire da esperimenti di meccanica, in quanto accelerazioni e forze sono le stesse in entrambi i riferimenti O e O'.
Questo comporta l'impossibilità di verificare sperimentalmente l'assioma A.

Quando Maxwell formulò le leggi dell'elettromagnetismo, il problema sembrava risolto. Ma le equazioni di Maxwell non sono covarianti per trasformazioni di Galileo. ($\vec{F} = m\vec{a}$ é covariante perché, seppur le coordinate vettoriali cambiano al cambiare del sistema di riferimento, la forma vettoriale della espressione é sussistente).
Si pensò allora che le equazioni di Maxwell fossero valide solo nello spazio assoluto, anche detto riferimento dell'etere, il mezzo nel quale si pensava si propagassero le onde elettromagnetiche.
Per la relatività Galileiana erano dunque ammesse differenti velocità della luce a seconda del sistema di riferimento considerato.
Alla fine dell'800 si stava sfruttando questa ipotesi per verificare la violazione delle equazioni di Maxwell in un sistema di riferimento non inerziale come quello terrestre. Si voleva cioé evidenziare il moto relativo della Terra rispetto all'etere. Si cercarono degli esperimenti di natura ottica.

Nel 1727/28, l'astronomo Bradley scoprì il fenomeno della aberrazione stellare, cioé il moto apparente degli oggetti celesti dovuto alla velocità finita della luce e al moto dell'osservatore (Terra). La posizione di una stella appare variare nell'arco dell'anno, disegnando delle ellissi in cielo.



Si tentò di sfruttare il fenomeno per evidenziare i moti relativi della Terra rispetto all' etere.

Per relatività Galileiana deve essere

$$\vec{c}\,' = \vec{c} - \vec{v} \qquad (3)$$

Nel sistema dell' etere dovrebbe essere $\qquad \cos\theta = \hat{v}\cdot\hat{c} \qquad (4.1)$

mentre in un sistema in movimento $\qquad \cos\theta' = \hat{v}\cdot\hat{c}' \qquad (4.2)$

Proiettando le velocità si ha:

$$\begin{cases} \vec{c}\,'\sin(\theta') = \vec{c}\sin(\theta) \\ \vec{c}\,'\cos(\theta') = \vec{c}\cos(\theta) - \vec{v} \end{cases} \qquad (5)$$

dunque

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - \frac{v}{c}} \qquad (6)$$

Le velocità in gioco sono $\qquad v \approx 30$ km/s

$\qquad c \approx 3\times10^5$ km/s

perciò $\qquad \frac{v}{c} \approx 10^{-4}$

Calcolando la posizione angolare della stella si ha:

$$\tan(\theta - \theta') = \frac{\frac{v}{c}\sin\theta}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{approssimazione } \frac{v}{c}\approx 0}}{\approx} \frac{v}{c}\sin\theta \qquad (7)$$

Come caspita si ottiene questo?

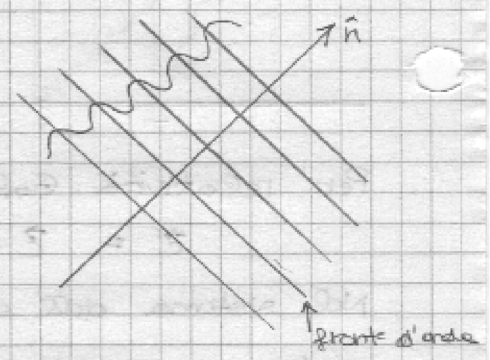
Invertendo c con c', immaginando cioè la terra ferma e la stella in moto ($\vec{c} = \vec{c}\,' + \vec{v}$), nei limiti della nostra approssimazione il risultato non cambia.

Di fatto misurazioni di tipo astronomico non possono evidenziare il moto assoluto della terra.

Pisa 27 Settembre 2007

Esperimenti di natura ondulatoria per cercare il moto assoluto:

E' detto fronte d'onda il luogo dei punti che a un dato istante sono tutti nello stesso stato di vibrazione.



La fase di un'onda è descritta dall'equazione

$$\Phi = \nu\left(t - \frac{\hat{n}\cdot\vec{r}}{c}\right) \qquad (1)$$

Quest'equazione deve valere in ogni sistema di riferimento.
Perciò, per la trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases} \qquad \Phi = \nu\left(t - \frac{\hat{n}\cdot\vec{r}}{c}\right) = \nu'\left(t' - \frac{\hat{n}'\cdot\vec{r}'}{c'}\right) \qquad (2.1)$$

$$= \nu'\left(t - \frac{\hat{n}'\cdot\vec{r}}{c'} + \frac{\hat{n}'\cdot vt}{c'}\right) \qquad (2.2)$$

Per trasformazioni di Galileo, deve essere $\hat{n} = \hat{n}'$. ← approfondire.
Questa è una conseguenza dell'univocità del tempo. ← perché?
Perciò:

$$\Phi = \nu'\left(t\left(1 + \frac{\hat{n}\cdot\vec{v}}{c'}\right) - \frac{\hat{n}\cdot\vec{r}}{c'}\right) \qquad (3)$$

$$\begin{cases} \nu = \nu'\left(1 + \frac{\hat{n}\cdot\vec{v}}{c'}\right) \\ \frac{\nu}{c} = \frac{\nu'}{c'} \end{cases} \qquad (4)$$

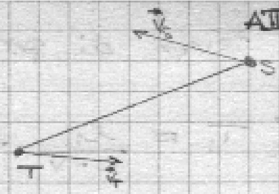
$$\frac{c}{c'} = \frac{\nu}{\nu'} = 1 + \frac{\hat{n}\cdot\vec{v}}{c'}$$ e quindi

$$\boxed{\begin{array}{l} c = c' + \hat{n}\cdot\vec{v} \\ c' = c - \hat{n}\cdot\vec{v} \end{array}} \qquad (5)$$

La (5) è in contraddizione con la legge di composizione delle velocità, per la quale dovrebbe essere

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v} \qquad (6)$$

Dunque la luce e le onde elettromagnetiche emesse da una stella si dovrebbero propagare con velocità differenti.



Si volle allora misurare la variazione della frequenza di emissione di una stella passando dal riferimento terrestre (o stellare) a quello assoluto:

$$\left.\begin{aligned} \nu_E &= \nu_s\left(1+\frac{\hat{n}\cdot\vec{v}_s}{c_s}\right) \\ \nu_T &= \nu_E\left(1-\frac{\hat{n}\cdot\vec{v}_T}{c}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

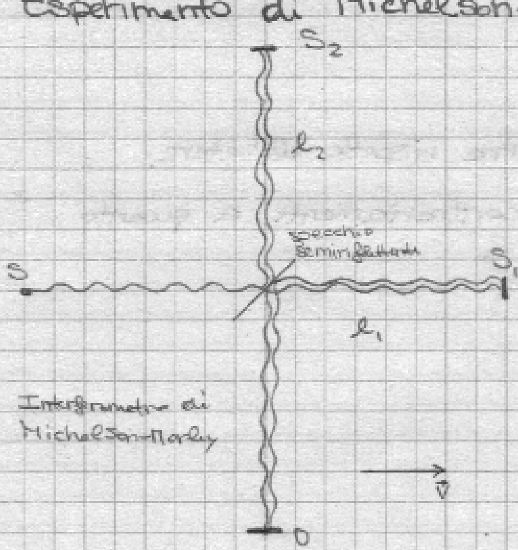
$$\nu_T = \nu_s\left(1+\frac{\hat{n}\cdot\vec{v}_s}{c_s}\right)\left(1-\frac{\hat{n}\cdot\vec{v}_T}{c}\right) \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\nu_T}{\nu_s} &= 1-\frac{\hat{n}\cdot\vec{v}_T}{c}+\frac{\hat{n}\cdot\vec{v}_s}{c_s}-\frac{(\hat{n}\cdot\vec{v}_s)(\hat{n}\cdot\vec{v}_T)}{c\,c_s} \\ &\approx 1+\hat{n}\cdot\left(\frac{\vec{v}_s}{c_s}-\frac{\vec{v}_T}{c}\right) \\ &\approx 1+\hat{n}\cdot\left(\frac{\vec{v}_s-\vec{v}_T}{c}\right) \qquad (9) \end{aligned}$$

Dunque, con la precisione con la quale si può misurare il moto relativo terra-stella, non è possibile apprezzare il contributo all'effetto Doppler dovuto al moto assoluto.

Serve quindi un esperimento in cui compaia la velocità rispetto all'etere, cioè un esperimento in cui sorgente e osservatore sono fermi tra loro.

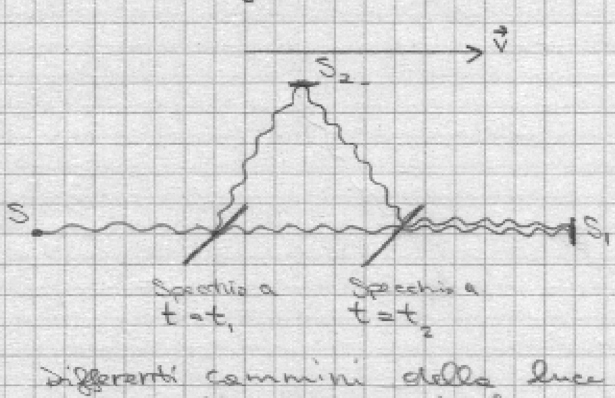
Esperimento di Michelson-Morley:



Uno specchio semiriflettente devia il fascio di luce emesso da una sorgente in due cammini ottici differenti.

Per relatività Galileiana, la velocità della luce si somma a quella dell'apparato, perciò i due cammini dovrebbero venire percorsi dal fascio a velocità differenti.

L'osservatore dovrebbe rilevare una interferenza, dal cui studio dovrebbe essere possibile misurare la velocità assoluta dell'apparato.



Differenti cammini della luce quando il sistema è in moto

Il tempo di percorrenza é dato da:

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{l_1}{c-v} + \dfrac{l_1}{c+v} = \dfrac{2l_1}{c} \dfrac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} & (10.1) \\ T_2 = \dfrac{2l_2}{c} \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & (10.2) \end{cases}$$

← ottenuto per costruzione geometrica con Pitagora.

Usiamo un interferometro a bracci uguali: $l_1 = l_2 = l$

Allora la variazione di fase che l'osservatore riscontrerebbe é data da:

$$\Delta\Phi = \nu(T_1 - T_2)$$

$$= \frac{2\nu l}{c}\left[\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

$$\approx \boxed{\frac{l}{\lambda}\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad (11)$$

La (11) ci dice che se la teoria dell'etere é valida si dovrebbe osservare una differenza di fase rilevabile.

Risultato dell'esperimento: Nessuna Interferenza!

Con un interferometro a bracci disuguali si può misurare la velocità della luce, che dovrebbe variare componendosi con la velocità della terra.

Conclusioni:

- Non si trova riscontro del moto della terra rispetto all'etere.
- La velocità della luce rimane costante, contrariamente a quanto formulato.

$\Rightarrow$ Non esiste l'etere!!

Pisa 28 Settembre 2007

Riformulazione dei postulati e conseguenze.

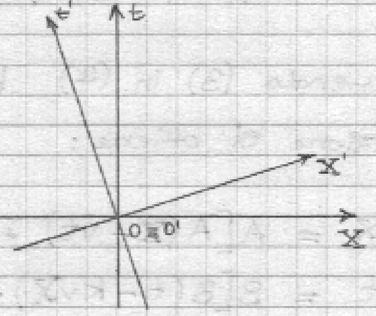
Fallita la teoria dell'etere, i postulati Newtoniani vennero sostituiti dal seguente:

Esistono infiniti sistemi di riferimento in cui é valida la geometria euclidea, si può misurare il tempo e definire la simultaneità. Ciascuno di questi sistemi è completo dal punto di vista cinematico e tutti sono equivalenti tra loro e si muovono di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto agli altri. É possibile rilevare il moto relativo tra sistemi.

Con processi logici di deduzione si vuole ora riformulare la cinematica.

$$\begin{cases} x'_i = x'_i(X,t) \\ t' = t'(X,t) \end{cases} \qquad (1)$$

Sia le coordinate spaziali che il tempo di un sistema di riferimento devono essere funzione delle coordinate e del tempo del sistema di riferimento iniziale.



Senza ledere la generalità si possono far combaciare le origini di spazio e tempo tra i vari sistemi di riferimento. Questo non comporta alcune ambiguità grazie all'isotropia dello spazio e alla uniformità del tempo.

Richiediamo ora che un moto rettilineo uniforme di un sistema sia ancora un moto rettilineo uniforme negli altri sistemi. La legge di trasformazione deve cioé mandare rette in rette (applicazioni lineari). Una applicazione lineare é la più semplice trasformazione compatibile con il principio di relatività.

A meno di una rotazione si può immaginare che il moto di traslazione dei due sistemi sia diretto lungo uno degli assi del primo sistema (es. asse x). Si possono poi far coincidere con una rotazione gli assi x e x'.

Si vogliono ora studiare le coordinate (y, z) al tempo t. Sarà allora, a meno di rotazioni del piano yz

$$\begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad (2)$$

La trasformazione elementare che rispetta le condizioni fino ad ora imposte, e dalla quale si possono ricavare tutte le altre mediante rotazioni e traslazioni é la seguente:

$$\begin{cases} X' = A(X - vt) \\ t' = B(t - KvX) \end{cases} \quad (3)$$

La velocità compare per garantire l'isotropia dello spazio per riflessione.
E' lecito sospettare la dipendenza dei coefficienti A, B e K dalla velocità. Inoltre essi non devono cambiare di segno per simmetria dello spazio, per cui saranno funzioni del modulo di v.

$$A = A(v^2) \quad , \quad B = B(v^2) \quad , \quad K = K(v^2)$$

Scriviamo ora la trasformazione inversa, ottenuta in pratica cambiando il segno di v:

$$\begin{cases} X = A(X' + vt') \\ t = B(t' + KvX') \end{cases} \quad (4)$$

Sostituendo (3) in (4) bisogna ottenere l'identità. Imponendo tale condizione si ottiene:

$$\begin{cases} X = A[A(X - vt) + vB(t - KvX)] \\ t = B[B(t - KvX) + KvA(X - vt)] \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} X = X(A^2 - ABKv^2) + (ABv - A^2v)t \\ t = t(B^2 - ABKv^2) + X(ABKv - B^2Kv) \end{cases} \quad (5.2)$$

Impongo ora l'identità delle (5.2)

$$\begin{cases} \begin{cases} A^2 - ABKv^2 = 1 \\ B^2 - ABKv^2 = 1 \end{cases} \\ \left.\begin{cases} ABv - A^2v = 0 \\ ABKv - B^2Kv = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow A = B \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\boxed{A^2(1 - Kv^2) = 1} \quad (6)$$

Da quanto ottenuto nell'equazione (6), la trasformazione (3) diventa:

$$\begin{cases} X' = \dfrac{X - vt}{\sqrt{1 - Kv^2}} \\ t' = \dfrac{t - KvX}{\sqrt{1 - Kv^2}} \end{cases} \quad (7)$$

Si noti che per $K = 0$ la trasformazione (7) diventa la ben nota trasformazione di Galileo.
K deve inoltre essere maggiore di ≥ 0, perché altrimenti si avrebbe una dualità di tempo e spazio.
Inoltre le dimensioni di K sono $K = [L^{-2}][T^2]$

A questo punto dobbiamo inserire nella teoria l'evidenza sperimentale della costanza della velocità della luce, che prendiamo come secondo postulato.
Indicato con u la velocità nel primo sistema di riferimento, vediamo che per le (7) u' é dato da:

$$u' = \frac{dX'}{dt'} = \frac{\frac{dX'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(X - vt)}{\frac{d}{dt}(t - KvX)} = \frac{u - v}{1 - Kvu} \qquad (8)$$

Applichiamo ora alla (8) il postulato di costanza della velocità della luce:

$$c' = \frac{c - v}{1 - Kvc} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{deve}}}{=} c \qquad (9.1)$$

$$c - v = c - Kc^2 v \qquad (9.2)$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{c^2}} \qquad (9.3)$$

<u>Trasformazioni Speciali di Lorentz</u>
Inserendo quanto ottenuto nelle (9) nella trasformazione (7) si ottengono le Trasformazioni speciali di Lorentz.

$$\begin{cases} X' = \dfrac{X - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t' = \dfrac{t - v/c^2\, X}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \qquad (10)$$

Si noti che le (10) si riducono alle trasformate di Galileo nel limite in cui $\frac{v}{c} \to 0$

Corollario: $$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \qquad (11)$$

Rispetto a queste trasformazioni le leggi di Maxwell sono covarianti.
Il principio di relatività é così esteso all'elettromagnetismo e quindi a tutta la fisica.

Notazione:

$$\frac{v}{c} = \beta$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$

$x_0 = ct$ ⟸ stratagemma per esprimere il tempo in metri.

Le (10) si riscrivono come

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta x_0) \\ x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x) \end{cases} \qquad (10')$$

Problemi:

Quanto appare lunga una sbarra di lunghezza a riposo l_0 quando viaggia a velocità $\vec{v}$ parallela alla sbarra stessa?

Nel sistema solidale alla sbarra: $x'_2 - x'_1 = l_0$

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = l_0$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$ Contrazione delle lunghezze

Osservazione: osservare ad un nostro stesso tempo gli estremi della sbarra corrisponde ad osservare i due estremi a tempi della sbarra diversi.

$$\begin{cases} t'_2 = \gamma(t - kvx_2) \\ t'_1 = \gamma(t - kvx_1) \end{cases}$$

Orologio in moto a velocità $\vec{v}$:

$x'_2 = x'_1$ Orologio in quiete nel sistema ad esso solidale

$x'_2 \,@\, t'_2$, $\quad x'_1 \,@\, t'_1 \qquad \Delta t' = t'_2 - t'_1$

$$t_2 - t_1 = \left[(t'_2 + vc^{-2}x'_2) - (t'_1 + vc^{-2}x'_1)\right]\gamma$$

$$= (t'_2 - t'_1)\gamma$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ dilatazione dei tempi.

Pisa 3 Ottobre 2007

Esperimenti Pensati:

Quanto fino ad ora ottenuto é frutto della formulazione teorica del principio di relatività. Vediamo ora come, per semplice deduzione logica, gli stessi risultati si possono ottenere da esperimenti ideali:

1) Due osservatori in moto relativo confrontano due aste di lunghezza propria l_0 nel momento in cui gli assi del sistema di riferimento di ciascun osservatore coincidono.

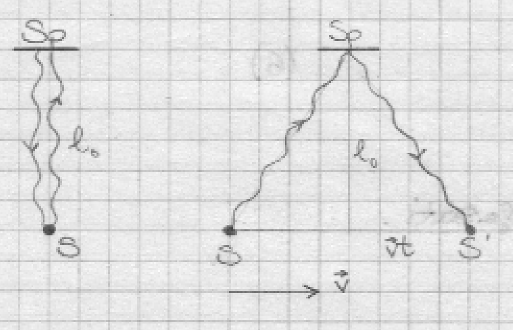
Il momento dell' osservazione coincide, infatti

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = (x - vt)\gamma \\ x = (x' + vt')\gamma \end{cases} \qquad (1)$$

$$x \equiv x' \quad \Rightarrow \quad t = t'$$

Se la direzione del moto é ortogonale alle aste, la lunghezza osservata dai due sistemi di riferimento deve essere la stessa, altrimenti uno dei due sarebbe privilegiato rispetto all' altro.

2)



Una sorgente invia un segnale elettromagnetico a uno specchio che lo fa rimbalzare indietro alla sorgente, dove viene misurato il tempo trascorso dall' istante di emissione.

Quando il sistema sorgente - specchio é in quiete, il tempo che il segnale impiega a tornare indietro é

$$T_0 = \frac{2l_0}{c} \qquad (2)$$

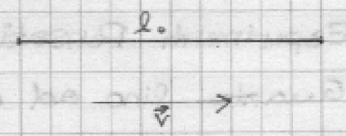
Quando invece il sistema si muove ortogonalmente alla direzione di emissione:

$$T = \frac{2}{c}\sqrt{l_0^2 + \frac{v^2T^2}{4}}$$

$$T^2 = \frac{4}{c^2}l_0^2 + \frac{v^2T^2}{c^2}$$

$$T^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{4l_0^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2l_0}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma T_0 \qquad (3)$$

3) Un osservatore che viaggia parallelo a una sbarra di lunghezza propria ℓ_0 e misura l'intervallo di tempo trascorso per passarci di fianco.



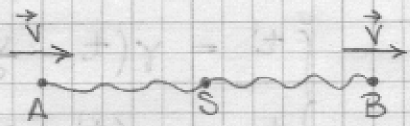
Dall'esperimento (2) sappiamo che

$$\Delta t' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\;\Delta t \qquad\qquad \Delta t = \frac{\ell_0}{v}$$

$$= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\;\frac{\ell_0}{v}$$

$$v\Delta t' = \ell = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\;\ell_0 \qquad (4)$$

4) Immaginiamo di sincronizzare due orologi mediante un segnale elettromagnetico emesso da una sorgente ad essi equidistante.



$\overline{AB} = \ell$

$$\begin{cases} ct_A = \frac{\ell}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - vt_A \\ ct_B = \frac{\ell}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + vt_B \end{cases} \qquad (5)$$

$$t_B - t_A = \frac{\ell}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(\frac{1}{c-v}-\frac{1}{c+v}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta t = \ell\,\frac{v^2}{c^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (6)$$

Perció i due orologi risulteranno sfasati.

Un osservatore relativistico dovrebbe essere immaginato come un reticolo di regoli e orologi in quiete.

Trasformazione Relativistica delle Velocità:

Riscriviamo le trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \quad (7) \qquad \text{Velocità in SR} \begin{cases} \dot{x} = u_x \\ \dot{y} = u_y \\ \dot{z} = u_z \end{cases} \quad (8)$$

Deriviamo ora le (7) per ricavare le leggi di trasformazione delle velocità (8):

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{\frac{dx'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \dfrac{\cancel{\gamma}(u_x - v)}{\cancel{\gamma}\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} = u'_x \\[2ex] \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \dfrac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} = u'_y \\[2ex] \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{\frac{dz'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \dfrac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} = u'_z \end{cases} \quad (9)$$

Non esiste una relazione vettoriale semplice per trasformare le velocità.

Per ottenere la trasformazione inversa $(u' \to u)$ basta cambiare il segno della velocità di traslazione v.

Si noti inoltre la seguente relazione tra i tempi dei due sistemi:

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right), \quad \frac{dt}{dt'} = \gamma\left(1 + \frac{vu_x}{c^2}\right) \quad (10)$$

Una conseguenza importante delle (9) é il modulo quadro della velocità:

$$u'^2 = \frac{(u_x - v)^2 + (u_y^2 + u_z^2)(1 - v^2/c^2)}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2} \quad (11)$$

da cui, mediante passaggi algebrici:

$$\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \; \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \quad (12)$$

Passando al reciproco, la (12) si può riscrivere come:

$$\gamma(u') = \gamma(u)\,\gamma(v)\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right) \qquad (13)$$

!

La (13) implica un'interscambiabilità di $\vec{u}$ con $\vec{v}$, cioè una dualità dell'oggetto e del sistema di riferimento.

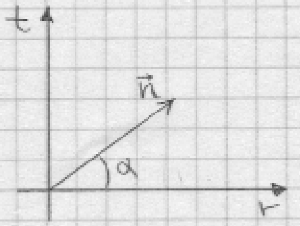
chiedere della struttura di gruppi

Effetto Doppler Relativistico:

Si è già visto che la fase Φ di un'onda deve essere invariante per cambiamento di sistema di riferimento (una cresta è sempre una cresta).

$$\Phi = \nu\left(t - \frac{\hat{n}\cdot\vec{r}}{w}\right) = \nu'\left(t' - \frac{\hat{n}'\cdot\vec{r}'}{w'}\right) \qquad (14)$$

con w = velocità di propagazione dell'onda.



La direzione del vettore d'onda $\vec{n}$, contrariamente a quanto si pensasse nelle teorie prerelativistiche, si trasforma al cambiamento del sistema di riferimento.

Sia α l'angolo che il vettore d'onda forma con la direzioni del moto relativo di due sistemi di riferimento SR e SR'.

Dalla (14), applicando le trasformazioni di Lorentz:

$$\nu\left[\gamma t' + \gamma\frac{v}{c^2}x' - \frac{\sin\alpha}{w}\,\vec{n}_\perp\cdot\vec{r}_\perp - \frac{\cos\alpha\,(\gamma x' + \gamma v t')}{w}\right] = \nu'\left(t' - \frac{\sin\alpha'}{w'}\,\vec{n}'_\perp\cdot\vec{r}'_\perp - \frac{\cos\alpha'\,x'}{w'}\right) \qquad (15)$$

Si noti che deve essere $\vec{n}_\perp\cdot\vec{r}_\perp = \vec{n}'_\perp\cdot\vec{r}'_\perp$ in quanto le quantità sono ortogonali alla direzione del moto. Otteniamo così che:

$$\begin{cases} \gamma\nu\cancel{t}\left(1 - \dfrac{v\cos\alpha}{w}\right) = \nu'\cancel{t} & (16.1)\\[2mm] \nu\,\dfrac{\sin\alpha}{w} = \nu'\,\dfrac{\sin\alpha'}{w'} & (16.2)\\[2mm] \cancel{x'}\gamma\nu\left[-\dfrac{v}{c^2} - \dfrac{\cos\alpha}{w}\right] = \cancel{x'}\,\nu'\,\dfrac{\cos\alpha'}{w'} & (16.3)\end{cases}$$

Risolvendo il sistema (16) per le variabili ν', α' e w' si ottiene:

$$\begin{cases} \nu' = \gamma\left(1 - \dfrac{\hat{n}\cdot\vec{v}}{w}\right)\nu & (17.1) \\ \tan\alpha' = \dfrac{1}{\gamma}\,\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \dfrac{vw}{c^2}} & (17.2) \\ w' = \dfrac{w - \hat{n}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{2vw}{c^2}\cos\alpha - \dfrac{v^2}{c^2}\sin^2\alpha + \dfrac{v^2w^2}{c^4}}} & (17.3) \end{cases}$$

Si noti che nel limite $\frac{v}{c} \to 0$ si ritrova che la direzione di propagazione dell'onda non cambia e che le velocità si compongono secondo le leggi classiche.

Effetto Doppler Relativistico: effetto trasversale

La (17.1) descrive l'Effetto Doppler Relativistico, dovuto alla trasformazione del tempo.

Si pensi per esempio ad un corpo in moto circolare uniforme intorno ad un osservatore. Una sorgente posta su tale corpo non si allontana né si avvicina all'osservatore, perciò, a rigore dell'effetto Doppler classico, la frequenza emessa dovrebbe corrispondere a quella ricevuta. La (17.1) ci dice invece che l'osservatore riceverà onde a frequenza $\nu' = \gamma\nu$ (Effetto Doppler Trasversale).

Pisa 5 Ottobre 2007

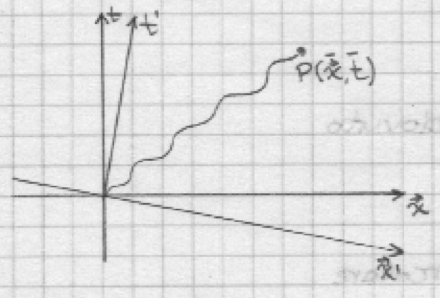
Ricerca della Semplicità:

Abbiamo visto che le coordinate spazio-temporali di un evento non si trasformano in maniera semplice e lineare tramite le trasformazioni speciali di Lorentz date dalle (1).

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \qquad (1)$$

Sappiamo però che possiamo comporre più trasformazioni di Lorentz ed esprimerle come una sola, il che ci suggerisce che i vari sistemi di riferimento diano vita a una struttura gruppale.

Per questo vogliamo trovare degli oggetti invarianti per trasformazione di Lorentz.



Per assioma di relatività c é invariante per trasformazione di Lorentz. Sfruttiamo allora la costanza di c considerando in due sistemi di riferimento SR e SR' un segnale elettromagnetico generato dall'origine comune dei due sistemi e arriva ad un punto P all'istante t.

E' immediato che la norma del vettore spaziale che congiunge l'origine al punto P é uguale alla distanza percorsa dal segnale nel tempo t, cioé:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \end{cases} \qquad (2)$$

Vale allora il seguente

Teorema: Se $c^2t^2 - \vec{r}^{\,2} = 0$ implica che $c^2t'^2 - \vec{r}'^{\,2} = 0$

Allora $c^2t^2 - \vec{r}^{\,2} = c^2t'^2 - \vec{r}'^{\,2}$ (3)

Dimostrazione: Applichiamo la trasformazione di Lorentz a $c^2t'^2 - \vec{r}'^{\,2} = 0$:

$$c^2\gamma^2\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)^2 - \gamma^2(x - vt)^2 - y^2 - z^2 =$$

$$= \gamma^2\left(c^2t^2 + \frac{v^2x^2}{c^2} - \cancel{2vxt} - x^2 - v^2t^2 + \cancel{2vxt}\right) - y^2 - z^2 =$$

$$= \gamma^2(c^2 - v^2)t^2 + \gamma^2\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)x^2 - y^2 - z^2 =$$

$$= c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 =$$

$$= c^2t^2 - \vec{r}^{\,2}$$

$\square$

La relazione (3) é sempre vera per i sistemi con la stessa origine. Definiamo allora la quantità s^2:

$$s^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - |\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2 \qquad (4)$$

$$A = (\vec{r}_1, t_1) \quad , \quad B = (\vec{r}_2, t_2)$$

s^2 é la differenza tra due percorsi di luce dall'origine a due generici eventi A e B, e non dipende quindi più dalla scelta dell'origine del sistema di riferimento.

s^2 é detta <u>INTERVALLO</u> tra gli eventi A e B, ed é invariante per trasformazione di Lorentz.

Geometria dello Spazio-Tempo:

Poniamo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

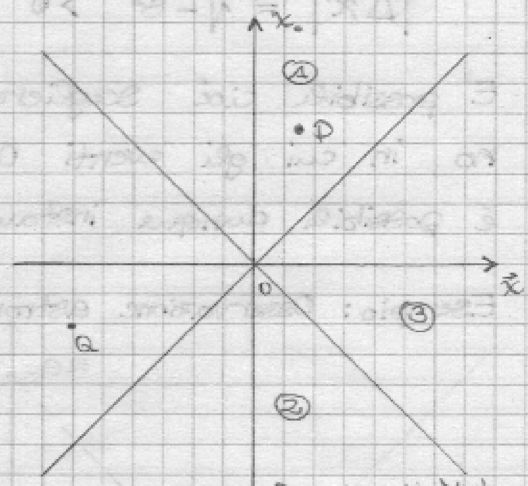
$x_0 = ct$

Un intervallo sarà dunque della forma

$$s^2 = \Delta x_0^2 - \Delta \vec{x}^2 \qquad (5)$$

Il luogo dei punti che annullano la quantità s^2 é dato dalle soluzioni dell'equazione

$$\vec{x}^2 = x_0^2 \qquad (6)$$



Spazio di Minkowsky

che rappresenta un ipercono in uno spazio quadridimensionale. Esso é detto <u>CONO LUCE</u> e rappresenta tutti i punti dello spazio-tempo che possono essere raggiunti da un impulso luminoso emesso dall'origine.

Il cono luce divide lo spazio-tempo in tre regioni distinte (vedi figura):

1: futuro assoluto;

2: passato assoluto;

3: altrove assoluto.

Il passato e il futuro soddisfano la disequazione

$$s^2 > 0 \qquad (7)$$

La (7) implica che:

$$\Delta x_0^2 - \Delta \vec{x}^2 > 0$$

$$\Delta x_0^2 > \Delta \vec{x}^2$$

$$1 > \frac{\Delta \vec{x}^2}{\Delta x_0^2} = \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} = \left| \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta x_0} \right| < 1 \qquad (8)$$

Ciò vuol dire che esiste un sistema di riferimento che si muove con velocità v data dalla (8) in cui un generico evento P interno al cono e l'evento O avvengono nello stesso luogo, ma a tempi diversi. Si può dunque definire un ordinamento temporale assoluto e di conseguenza una relazione di causalità.

L'altrove soddisfa invece la disequazione

$$s^2 < 0 \qquad (9)$$

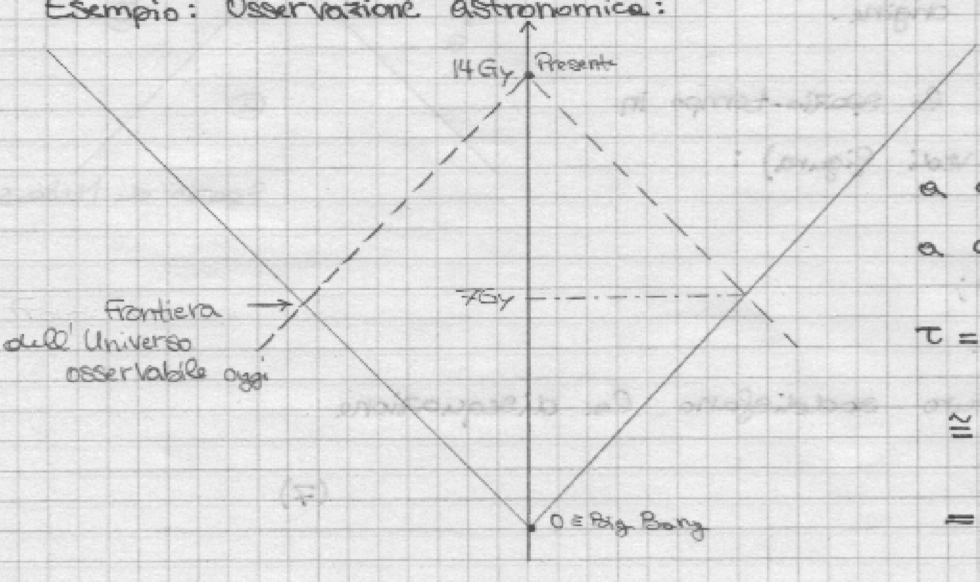
Che porterebbe ad una velocità di traslazione di un sistema di riferimento SR' maggiore di c, che è assurdo. Possiamo però imporre la condizione $\Delta x_0' = 0$, ottenendo

$$\cancel{\Delta x_0'^2} - \Delta x'^2 < 0$$

$$|\Delta x'| = \sqrt{-s^2} > 0 \qquad (10)$$

E' possibile cioé scegliere un sistema SR' sufficientemente lontano in cui gli eventi O e Q avvengono allo stesso istante. Non é possibile dunque instaurare alcuna relazione causale.

Esempio: Osservazione astronomica:



Ipotizzando un universo in espansione a velocità prossima a c, una galassia che viaggia a c−ε ha visto trascorrere un tempo

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{(c-\varepsilon)^2}{c^2}}\, T$$

$$\cong \sqrt{1 - \frac{c^2 - 2\varepsilon c}{c^2}}\, T$$

$$= \sqrt{\frac{2\varepsilon}{c}}\, T$$

Tempo Proprio:

Consideriamo due eventi p e p' infinitamente vicini nello spazio-tempo. Possiamo allora definire

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^{\,2} = dx_0^2 - d\vec{x}^{\,2} \qquad (11)$$

Considerando ora un punto materiale che si muove con legge oraria $\vec{r} = \vec{r}(t)$ nel sistema di riferimento ad esso solidale:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \underset{0}{\cancel{d\vec{r}^{\,2}}} \qquad (12)$$

Dove $d\tau$ é un infinitesimo del tempo proprio della particella.

$$\Delta\tau = \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{c}\, ds = \frac{1}{c}\int_{t_A}^{t_B} \frac{ds}{dt}\, dt \qquad (13.1)$$

Per sostituzione $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c^2 - \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2$

$$\frac{ds}{dt} = c\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2} = c\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\vec{u}^{\,2}(t)}$$

$$\Delta\tau = \frac{1}{\cancel{c}}\int_{t_A}^{t_B} \cancel{c}\sqrt{1 - \frac{\vec{u}^{\,2}(t)}{c^2}}\, dt \qquad (13.2)$$

τ é una curva nel cono di luce, detta linea di universo della particella.

Quadrivettori e Notazione di Einstein:

Vogliamo trovare degli oggetti che si comportino per trasformazioni di Lorentz in modo covariante, allo stesso modo in cui i vettori si trasformano per rotazione dello spazio.

Definiamo il quadrivettore come

$$(x_0, \vec{x}) = (x_0, x_1, x_2, x_3) \qquad (14)$$

Scriviamo ora le trasformazioni di Lorentz in modo simbolico:

$$x'_\alpha = \sum_\beta A_{\alpha\beta}\, x_\beta \qquad (15)$$

con $\alpha, \beta = 0,1,2,3$ e $A_{\alpha\beta}$ la matrice della trasformazione.

Nel caso delle trasformazioni speciali, quelle in cui la traslazione dei sistemi avviene lungo un asse (es. asse x) la matrice é di questo tipo

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Costruiamo ora la matrice metrica $\eta_{\alpha\beta}$.

(17)

Possiamo cosí scrivere un intervallo nella seguente forma simbolica:

$$s^2 = \sum_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}\, x_\alpha x_\beta = x_0^2 - \vec{x}^2 \qquad (18)$$

Imponiamo ora l' invarianza dell' intervallo per trasformazione di Lorentz:

$$s^2 = \sum_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}\, x'_\alpha x'_\beta \qquad (19.1)$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} \left(\sum_{\gamma} A_{\alpha\gamma}\, x_\gamma\right)\left(\sum_{\delta} A_{\beta\delta}\, x_\delta\right) \qquad (19.2)$$

$$= \sum_{\gamma\delta} \eta_{\gamma\delta}\, x_\gamma x_\delta \qquad (19.3)$$

Questo implica che

$$\boxed{\sum_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}\, A_{\alpha\gamma}\, A_{\beta\delta} = \eta_{\gamma\delta}} \qquad (20)$$

la (20) é vera per la più generale trasformazione di Lorentz, in cui $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$

Qualsiasi $A_{\alpha\gamma}$ che verifica tale relazione é una trasformazione di Lorentz.

Le trasformazioni $A_{\alpha\gamma}$ devono avere determinante ± 1, in quanto il modulo di s é fissato. Le trasformazioni con $\det(A_{\alpha\gamma}) = +1$ sono dette <u>trasformazioni proprie</u>.

Si noti inoltre che deve essere $A_{00} > 0$

Inoltre la (20) definisca una struttura di gruppo sullo spazio di Minkowsky simile a quella delle rotazioni di $\mathbb{R}^4$, $O(4)$. Tuttavia lo spazio di Minkowsky differisce da $\mathbb{R}^4$ in quanto é uno spazio a 3+1 dimensioni complesse.

Curiosità: Senza postulato di costanza di c, un intervallo sarebbe semplicemente la norma di $\mathbb{R}^4$.

Notazione Relativistica Standard:

Definiamo lo spostamento infinitesimo dX^μ con $\mu = 0,1,2,3$:

$$dX^\mu = (dx^0 = cdt,\ dx^1, dx^2, dx^3) \qquad (1)$$

In generale le coordinate di un evento in un sistema di riferimento sono funzione delle coordinate dello stesso rispetto ad un altro sistema:

$$X'^\mu = X'^\mu(X^\nu) \qquad (2)$$

Consideriamo la definizione di differenziale

$$dX'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\nu} dX^\nu \qquad (3)$$

Definendo la matrice di trasformazione delle coordinate

$$A^\mu{}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\nu} \qquad (4)$$

si può riscrivere la (3) come:

$$dX'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} A^\mu{}_\nu\, dX^\nu \qquad (3')$$

Qualunque oggetto che verifica la (3') é detto un QUADRIVETTORE.

$$V'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} A^\mu{}_\nu\, V^\nu \qquad (5)$$

Il gradiente di una generica funzione si comporta bene per il gruppo delle rotazioni, ma per trasformazione di Lorentz si comporta in maniera diversa, infatti:

$$\frac{\partial}{\partial X'^\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial X^\nu}{\partial X'^\mu} \frac{\partial}{\partial X^\nu} = V'_\mu \qquad (6)$$

$$A_\mu{}^\nu = \frac{\partial X^\nu}{\partial X'^\mu} \qquad (7)$$

$$V'_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} A_\mu{}^\nu\, V_\nu \qquad (6')$$

I vettori che si trasformano secondo la (5), cioé come il vettore degli spostamenti, sono detti CONTROVARIANTI (indice in alto).
I vettori che trasformano secondo la (6'), cioé come i gradienti, sono detti COVARIANTI (indice in basso).

I quadrivettori controvarianti sono strettamente legati a quelli covarianti e viceversa.

Analizziamo la seguente relazione del tutto generale:

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \qquad \text{(delta di Kroneker} = \text{matrice identità)} \qquad (8)$$

Le derivate di una componente valgono 1 rispetto a sé stessa e 0 rispetto alle altre componenti.

Dalle relazioni (4) e (7) segue allora che

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} = \sum_{\rho=0}^{3} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} = \sum_{\rho=0}^{3} \left(A^{\mu}{}_{\rho}\right)\left(A_{\nu}{}^{\rho}\right) \qquad (9)$$

Deve perciò essere

$$\left(A_{\nu}{}^{\rho}\right) = \left[\left(A_{\rho}{}^{\mu}\right)^{-1}\right]^{T} \qquad \text{(la trasposizione serve solo a mettere gli indici al posto giusto)} \qquad (10)$$

Nel gruppo delle rotazioni $A = (B^{-1})^{T} \Leftrightarrow A = B$, quindi non c'é alcuna differenza tra vettori covarianti e controvarianti. Questo non é più vero.

Vogliamo ora trovare una relazione più intima tra quadrivettori controvarianti e covarianti.

Riprendiamo allora la metrica dello spazio di Minkowsky:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

La metrica di Minkowsky $\eta_{\mu\nu}$ é un quadritensore, e gode della seguente proprietà:

$$\sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}\, \eta^{\nu\rho} = \delta_{\mu}{}^{\rho} \qquad (12)$$

dove $\eta^{\nu\rho} = \left(\eta_{\mu\nu}\right)^{-1}$

In generale un tensore trasforma per applicazione delle appropriate matrici di trasformazione.

Il quadritensore della metrica di Minkowsky è però invariante per trasformazione di Lorentz:

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} \, A^{\mu}{}_{\mu'} A^{\nu}{}_{\nu'} = \eta'_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} \qquad (13)$$

Se $A_{\mu}{}^{\nu}$ é una trasformazione che soddisfa la (13) (trasformazione di Lorentz), allora vale anche

$$A_{\mu}{}^{\nu} = \sum_{\mu',\nu'=0}^{3} \eta_{\mu\mu'} \eta^{\nu\nu'} A^{\mu'}{}_{\nu'} \qquad (14)$$

Notazione:

In espressioni tensoriali l' indice ripetuto sottointende la somma.

Per la (14) segue l' importante proprietà della metrica di trasformare quadrivettori controvarianti in covarianti, mediante l' operazione di contrazione:

$$V^{\mu} \longmapsto V_{\mu} = \eta_{\mu\nu} V^{\nu} \qquad (15)$$

Viceversa $V^{\nu} = \eta^{\nu\mu} V_{\mu}$.

Regola:

In una stringa, un indice ripetuto deve comparire una volta in basso e una in alto. Se compare due volte dalla stessa parte si é sbagliato qualcosa.

Cerchiamo ora altri invarianti relativistici che sfruttino la semplicità di trasformazione dei quadrivettori. Siano per questo V^{μ} e W^{μ} due quadrivettori. Possiamo allora scrivere l' intervallo tra essi come

$$S^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta \vec{x})^2$$

$$= \eta_{\mu\nu} \Delta X^{\mu} \Delta X^{\nu} \qquad (16.1)$$

$$= \eta_{\mu\nu} V^{\mu} W^{\nu} \qquad (16.2)$$

$$= V^0 W^0 - \vec{V} \cdot \vec{W} \qquad (16.3)$$

Le (16) definiscono un prodotto scalare di Lorentz, che è invariante per trasformazione di Lorentz. Con le opportune contrazioni, sono equivalenti le scritture $\eta_{\mu\nu} V^{\mu} W^{\nu} = V_{\nu} W^{\nu} = V^{\mu} W_{\mu}$.

Il prodotto scalare così definito è dunque il prodotto di un quadrivettore controvariante con uno covariante.

Per qualunque tensore T valgono le seguenti relazioni:

$$T'^{\mu\nu} = \left(A^{\mu}{}_{\mu'}\right)\left(A^{\nu}{}_{\nu'}\right) T^{\mu'\nu'} \qquad \text{tensore} \rightarrow \text{tensore} \qquad (17.1)$$

$$T^{\mu\nu} V_{\nu} = Z^{\mu} \qquad \text{tensore - quadrivettore} \rightarrow \text{quadrivettore} \qquad (17.2)$$

$$T^{\mu\nu} U_{\mu\nu} = S \qquad \text{tensore-tensore} \rightarrow \text{scalare} \qquad (17.3)$$

Con la notazione introdotta, l'intervallo infinitesimo si scrive come

$$\boxed{ds^2 = dx^{\mu}\, dx_{\mu}} \qquad (18)$$

Come si è già detto, il determinante delle trasformazioni di Lorentz proprie è uguale a +1. Allora

$$A^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

$$\det\left(A^{\mu}{}_{\nu}\right) = \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) = \text{Jacobiano della funzione del cambiamento di coordinate} \qquad (19)$$

La (19) implica che l'elemento di 4-volume d^4x^{μ} è un invariante relativistico.

$$d^4x^{\mu} = d^4x'^{\mu} \qquad (20)$$

d^4x^{μ} si usa per l'integrazione in spazio e tempo. Esso è un invariante in quanto la dilatazione del tempo e la contrazione delle lunghezze si compensano a vicenda.

Per il principio di relatività, ogni legge fisica deve essere covariante per cambiamento di sistema di riferimento, deve cioè ammettere una espressione covariante in termini di quadrivettori e quadritensori.

Pisa 17 Ottobre 2007

Cinematica Relativistica:

In generale si é visto che:

$$V^\mu = (V^0, \vec{V}) \qquad \text{quadrivettore controvariante} \qquad (1.1)$$

$$V_\mu = (V^0, -\vec{V}) \qquad \text{quadrivettore covariante} \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial V^\nu} = \delta^\mu{}_\nu \qquad (1.3)$$

Sia dX^μ un vettore dello spazio di Minkowsky, infinitesimo e controvariante:

$$dX^\mu = \{ c\,dt = dx^0 \ , \ d\vec{x} = (dx^1, dx^2, dx^3) \} \qquad (2)$$

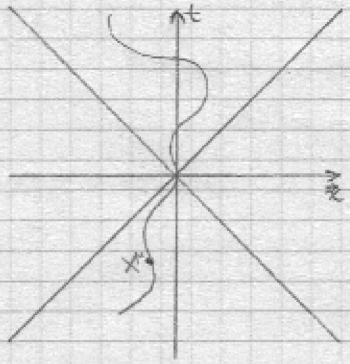
Da questo si é visto che un intervallo infinitesimo é della forma:

$$ds^2 = dX^\mu dX_\mu \qquad (3)$$

La metrica di Minkowsky non induce propriamente una distanza, ma qualcosa che si comporta in maniera molto simile e che ne conserva molte delle caratteristiche.

Consideriamo l' intervallo infinitesimo

$$ds = \sqrt{ds^2} = c\,d\tau \qquad (4)$$



Si era trovato che

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}}\ dt \qquad (5)$$

$$x(t) = \vec{u}\,t = \frac{d\vec{x}}{dt}\,t \qquad (6)$$

Dalla (5) si può trovare la funzione $\tau(t)$ che lega il tempo proprio della particella con il tempo del sistema di riferimento. $\tau(t)$ é una funzione invertibile in quanto monotona:

$$\tau^{-1}(t) = t(\tau) \qquad (7)$$

Si può allora scrivere in forma parametrica la legge oraria di una particella che si muove nello spazio-tempo:

$$\vec{x}(t(\tau)) \Rightarrow \begin{cases} t(\tau) \\ \vec{x}(\tau) \end{cases} \qquad (8)$$

Derivando la (8) rispetto al tempo proprio si ottiene

$$\frac{dX^\mu}{d\tau} = U^\mu \qquad (9)$$

che ha la proprietà di trasformare come un quadrivettore, grazie al fatto che τ è un invariante di Lorentz.
E' così definita la QUADRIVELOCITA'. In componenti:

$$U^\mu = \left\{\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau}\right\} = \left\{c\,\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau}\right\} \qquad (10)$$

$$\text{Ma } \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2(t)}{c^2}}} = \gamma(u(t)) \qquad (11)$$

Perciò

$$\boxed{U^\mu = \left\{c\gamma(u),\ \gamma(u)\,\vec{u}\right\}} \qquad (10')$$

La quadrivelocità è dunque funzione della sola velocità ordinaria.
Trasformando per Lorentz la quadrivelocità:

$$U'^\mu = A^\mu{}_\nu\, U^\nu \qquad (12)$$

Per la trasformazione speciale con traslazione lungo l'asse x

$$A^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma(V) & -\beta\gamma(V) & & \\ -\beta\gamma(V) & \gamma(V) & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

$$\begin{cases} c\gamma(u') = \gamma(V)\,c\,\gamma(u) - \frac{V}{c}\,\gamma(V)\gamma(u)\,u_x & (14.1)\\ \gamma(u')\,u'_x = \gamma(V)\,\gamma(u)\,u_x - \frac{V}{c}\,\gamma(V)\gamma(u)\,c & (14.2)\\ \gamma(u')\,u'_y = \gamma(u)\,u_y & (14.3)\\ \gamma(u')\,u'_z = \gamma(u)\,u_z & (14.4) \end{cases}$$

Dalla (14.1) segue la già nota legge di composizione delle velocità:

$$\gamma(u') = \gamma(V)\gamma(u)\left[1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{V}}{c^2}\right] \qquad (15)$$

Dalla (14.2) segue la legge di trasformazione delle velocità

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{V}}{c^2}} \qquad (16)$$

I quadrivettori semplificano quindi i conti e ci assicurano la covarianza dei risultati.

Il modulo quadro della quadrivelocità è:

$$U^\mu U_\mu = \left(c^2\gamma^2(u) - |\vec{u}|^2\gamma^2(u)\right)$$

$$= \gamma^2(u)\, c^2\left(1-\frac{\vec{u}^2}{c^2}\right) = c^2 \qquad (16)$$

Questo risultato non aggiunge alcuna informazione fisica, ed era del tutto prevedibile, infatti:

$$\frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{dX_\mu}{d\tau} = \frac{dS^2}{d\tau^2} = c^2 \qquad (17)$$

Definiamo a partire dalla quadrivelocità la QUADRIACCELERAZIONE:

$$a^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{dU^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau}$$

$$= \gamma(u)\left(\frac{dU^\mu}{dt}\right) = \gamma(u)\frac{d}{dt}\left(c\gamma(u), \gamma(u)\vec{u}\right) \qquad (18)$$

$$\frac{d}{dt}\gamma(u) = \frac{d}{dt}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2}(-2)\frac{\vec{u}}{c^2}\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$= \gamma^3(u)\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2} \longleftarrow ! \qquad (19)$$

$$\boxed{a^\mu = \left(\gamma^4(u)\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c}, \gamma^2(u)\vec{a} + \gamma^4(u)\frac{\vec{u}}{c}\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c}\right)} \qquad (20)$$

Si vede che l'accelerazione e la quadriaccelerazione hanno la stessa direzione solo se $\vec{a} \parallel \vec{u}$ o $\vec{a} \perp \vec{u}$, cioé nei moti rettilinei e in quelli circolari.

In tutti gli altri casi si avrà invece che la quadriaccelerazioni (e dunque le forze relativistiche) saranno funzioni anche della velocità.

Analizziamo il prodotto

$$a^\mu U_\mu = \gamma^5(u)\,\vec{u}\cdot\vec{a} - \gamma^3(u)\,\vec{a}\cdot\vec{u} - \gamma^5(u)\frac{u^2}{c^2}\,\vec{a}\cdot\vec{u}$$

$$= \gamma^3(u)\,\vec{a}\cdot\vec{u}\left(\gamma^2(u) - \gamma^2(u)\frac{u^2}{c^2} - 1\right) = 0 \qquad (21)$$

Esso é banalmente un invariante di Lorentz. Il risultato della (21) segue da:

$$\frac{dc^2}{d\tau} = 0 \;, \qquad \frac{d}{d\tau}\underbrace{(U^\mu U_\mu)}_{= c^2} = 2a^\mu U_\mu \qquad (22)$$

La (21) ci dà un'informazione circa le componenti dell'accelerazione, che non sono tutte indipendenti, infatti la (21) ci dice che quadriaccelerazione e quadrivelocità sono sempre ortogonali.

Cerchiamo ora un invariante di Lorentz non banale:

$$a^\mu a_\mu = \gamma^8(u)\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c}\right)^2 - \gamma^4(u)\vec{a}^2 - \gamma^8\frac{u^2}{c^2}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c}\right)^2 - 2\gamma^6(u)\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c}\right)^2$$

$$= \gamma^6\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c}\right)^2 - \gamma^4(u)\vec{a}^2 - 2\gamma^6\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c}\right)^2$$

$$= -\gamma^4(u)\left[\vec{a}^2 + \gamma^2(u)\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c}\right)^2\right] \qquad (23)$$

Questo invariante ha alcune caratteristiche:

- la quadriaccelerazione ha norma negativa, dunque è un quadrivettore di genere spazio.
- Supponiamo $\vec{a} \parallel \vec{u}$ (moto rettilineo). Allora

$$a^\mu a_\mu = -\gamma^4(u)\left[a^2 + \gamma^2(u)\, a^2 \frac{u^2}{c^2}\right]$$

$$= -\gamma^6(u)\left[a^2\left(1 - \cancel{\frac{u^2}{c^2}}\right) + \cancel{a^2\frac{u^2}{c^2}}\right]$$

$$= -\gamma^6 a^2 \qquad (24)$$

Dunque nei moti rettilinei $\gamma^3(u)\vec{a}$ è un invariante di Lorentz. Fisicamente questo ci dice che nei sistemi di riferimento in cui l'oggetto appare più veloce, esso appare meno accelerato.

La (24) è conseguenza dell'invalicabilità della velocità della luce: è teoricamente impossibile accelerare un oggetto fino a raggiungere la velocità della luce.

Nel riferimento di quiete istantanea

$$a^\mu = (0, \vec{a}_0) \quad e \quad U^\mu = (c, \vec{0}) \qquad (25)$$

cioé a^μ ha componente temporale nulla e come componente spaziale l'accelerazione propria.

$$a^\mu a_\mu = -a_0^2 \qquad (26)$$

a_0 è un invariante relativistico.

Nei moti rettilinei $\vec{a}_\circ = \gamma^3(u)\,\vec{a}$ e si può ricavare l'equazione del moto a partire da

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = a_\circ \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2} \qquad (27)$$

Un altro invariante che si era incontrato é la fase di un onda:

$$\Phi = \nu \left[t - \frac{\hat{n}\cdot\vec{r}}{\vec{w}}\right]$$
$$= \left(\frac{\nu}{c}\,,\, \frac{\nu\hat{n}}{\vec{w}}\right) \cdot \left(ct\,,\,\vec{r}\right)$$
$$= K^\mu \cdot X^\mu \qquad (28)$$

K^μ é il quadrivettore d'onda. L'effetto Doppler relativistico può essere descritto dalla trasformazione di K^μ

$$K'^\mu = A^\mu{}_\nu\, K^\nu$$
$$\Phi = K^\mu X_\mu$$

La norma quadra del vettore d'onda é:

$$K^\mu K_\mu = \frac{\nu}{c^2}\left[1 - \frac{c^2}{w^2}\right]$$

Se l'onda é elettromagnetica, $w = c$ e la norma di K^μ é nulla, cioé K^μ é un vettore luce.

Pisa 19 Ottobre 2007

Dinamica Relativistica:

Nel postulato di Mach della dinamica Newtoniana

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0 \qquad (1)$$

Si vede l' inconsistenza della meccanica classica con il principio di relatività. La (1) non è infatti covariante per trasformazione di Lorentz.

Il problema giace nel concetto di azione a distanza delle forze, ritenuta istantanea nella meccanica classica, e che si scontra ora con la relatività di spazio e tempo.

La meccanica relativistica abolisce il concetto di azione a distanza, che peraltro disturbava già Newton, che formulava le sue leggi premettendo che "Tutto avviene come se..."

Siamo quindi ora di fronte al problema di riformulare una nuova dinamica che sia coerente con il principio di relatività. Potremmo basare le nuove leggi su quelle dell' elettromagnetismo, dato che sappiamo che le equazioni di Maxwell sono già covarianti per trasformazione di Lorentz. Questa strada tuttavia richiederebbe l' introduzione della nozione di campo, e quindi delle complicazioni concettuali.

Si può allora procedere per analisi di processi fisici istantanei (nello spazio e nel tempo): gli urti.

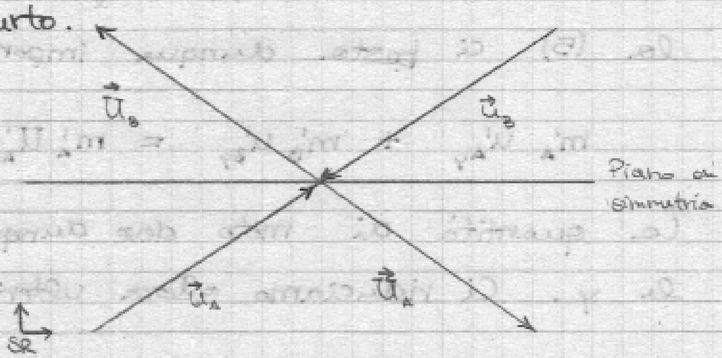
Per l' analisi di un urto di due corpi in moto rettilineo uniforme non possiamo usare la (1), in quanto perde completamente significato ($\|\vec{a}_{1,2}\| = 0$ prima e dopo l' urto, $\|\vec{a}_{1,2}\| = +\infty$ durante l' urto). Si può però usare il suo integrale primo (conservazione delle quantità di moto)

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = \text{costante} \qquad (2)$$

La (2) si può usare per descrivere processi istantanei, ma bisogna anche ricordare che, data la complessità delle leggi di trasformazione delle velocità, essa non è covariante.

Procediamo dunque euristicamente, cercando delle leggi che generalizzino al caso relativistico la dinamica Newtoniana mediante esperimenti ideali, facendo comunque attenzione che, nel limite non relativistico, le nuove leggi si riducano a quelle classiche.

Analizziamo dunque l' urto elastico di due particelle identiche, indicando con lettere minuscole le quantità prima dell' urto e con maiuscole le quantità dopo l' urto.

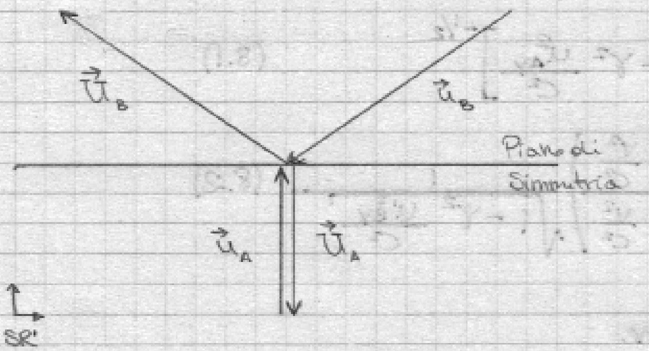


Mettiamoci dapprima in un sistema di riferimento SR in cui l' urto avviene in maniera simmetrica e deve quindi essere verificata la (2).

Valgono allora le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \vec{u}_A + \vec{u}_B = 0 \\ \vec{U}_A + \vec{U}_B = 0 \end{cases} \qquad (3.1)$$

$$\begin{cases} u_{Ax} = U_{Ax} \quad , \quad u_{Ay} = -U_{Ay} \\ u_{Bx} = U_{Bx} \quad , \quad u_{By} = -U_{By} \end{cases} \qquad (3.2)$$



Mettiamoci ora in un riferimento SR' in moto rettilineo uniforme rispetto a SR con velocità $v = u_{Ax}$ nella direzione delle x. Applicando le trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} u'_{Ax} = U'_{Ax} = 0 \\ u'_{Ay} = -U'_{Ay} = \gamma(v)\, u_{Ay} \end{cases} \qquad (4.1)$$

$$\begin{cases} u'_{Bx} = U'_{Bx} = -\dfrac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} \\ \\ u'_{By} = -U'_{By} = \gamma(v)\, \dfrac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}\, u_{By} \end{cases} \qquad (4.2)$$

Supponiamo ora che la legge di conservazione della quantità di moto sia valida anche in meccanica relativistica, a patto di ridefinire opportunamente la massa. L' enunciato

Ma chiano non ci vieta infatti la possibilità che la massa dipenda da altre grandezze fisiche. Si vede allora che

$$m'_A \vec{u}'_A + m'_B \vec{u}'_B = m'_A \vec{U}'_A + m'_B \vec{U}'_B \qquad (5)$$

Le masse saranno comunque conservate in uno stesso sistema di riferimento.

Per costruzione del nostro esperimento ideale, per le (4) e per la (5) ci basta dunque imporre:

$$m'_A u'_{Ay} + m'_B u'_{By} = m'_A U'_{Ay} + m'_B U'_{By} \stackrel{!}{=} 0 \qquad (6)$$

La quantità di moto deve dunque essere sempre nulla lungo le y. Ci riduciamo allora ulteriormente a

$$m'_A u'_{Ay} + m'_B u'_{By} = 0 \qquad (7)$$

$$m'_A \gamma(V) u_{Ay} + m'_B \gamma(V) \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{1 + \frac{V^2}{c^2}} u_{By} = 0 \qquad (7')$$

Per le (3) si vede allora che la massa non può essere un invariante di Lorentz. Calcoliamo allora le funzioni

$$\gamma'_A = \left[1 - \frac{u'^2_{Ax} + u'^2_{Ay}}{c^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 - \gamma^2 \frac{u^2_{Ay}}{c^2}\right]^{-1/2} \qquad (8.1)$$

$$\gamma'_B = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_{Bx} + u'^2_{By}}{c^2}}} = \left(\frac{1 + \frac{V^2}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \frac{u^2_{By}}{c^2}}} \qquad (8.2)$$

Si può allora riscrivere la (7') come

$$\frac{m'_A}{\gamma'_A} \frac{u_{Ay}}{\sqrt{1 - \gamma^2 \frac{u^2_{Ay}}{c^2}}} + \frac{m'_B}{\gamma'_B} \frac{u_{By}}{\sqrt{1 - \gamma^2 \frac{u^2_{By}}{c^2}}} = 0 \qquad (9)$$

$$\Rightarrow \frac{m'_A}{\gamma'_A} - \frac{m'_B}{\gamma'_B} = 0 \qquad (10)$$

La (10) ci suggerisce la seguente definizione di massa relativistica, dove m_0 è la massa a riposo:

$$m(u) = m_0 \gamma(u) \qquad (11)$$

In relatività è condizione necessaria alla conservazione della quantità di moto l'esistenza di una relazione funzionale

che lega la massa alla velocità.
Per quanto visto, la legge di conservazione della quantità di moto relativistica deve essere della forma

$$m_{1_0} \gamma(u_1) \vec{u}_1 + m_{2_0} \gamma(u_2) \vec{u}_2 = \text{costante} \qquad (12)$$

Definiamo il vettore quantità di moto relativistica come

$$\vec{p} = m_0 \gamma(u) \vec{u} \qquad (13)$$

La massa relativistica $m_0 \gamma(u)$ é una massa inerziale, una misura della resistenza all' accelerazione. Si osservi la coerenza con il postulato di costanza e invalicabilità della velocità della luce. Infatti $m(u) \to \infty$ per $u \to c$, é dunque tanto più difficile accelerare un corpo quanto più la sua velocità approccia quella della luce.

Definiamo il quadrivettore quadrimpulso:

$$P^\mu = m_0 U^\mu = \left(m_0 \gamma(u) c \ , \ m_0 \gamma(u) \vec{u} \right)$$
$$= \left(m(u) c \ , \ \vec{p} \right) \qquad (14)$$

Il quadrimpulso P^μ é covariante di Lorentz.
Segue allora che:

$$P_1^\mu + P_2^\mu = \text{cost.} \iff P_1'^\mu + P_2'^\mu = \text{cost.} \qquad (15)$$

La (15), assieme alla definizione di quantità di moto, dimostra la validità della relazione (12), che rappresenta, assieme alla sua controparte tensoriale (15), l' equazione fondamentale della dinamica relativistica.

<u>Forza Relativistica:</u>

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m_0 \gamma(u) \vec{a} + m_0 \frac{d\gamma}{dt} \vec{u}$$
$$= m(u) \left(\vec{a} + \gamma^2(u) \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{u} \right) \qquad (16)$$

Si vede che in generale $\vec{F}$ ed $\vec{a}$ non sono paralleli. Si possono però considerare due casi particolari.

Nel caso in cui $\vec{F} \parallel \vec{u}$ $(\Rightarrow \vec{F} \parallel \vec{a})$, si ha

$$F_{\parallel} = m_0 \gamma^3 a_{\parallel} \qquad (17)$$

e segue dall' invarianza di $\gamma^3 a$ nei moti rettilinei che in questo caso é $F_{\parallel}$ un invariante di Lorentz.

Nel caso $\vec{F} \perp \vec{u}$ $(\Rightarrow F \parallel \vec{a})$ si ha

$$F_{\perp} = m_0 \gamma\, a_{\perp} \qquad (18)$$

Si definiscono $m_{\parallel} = m_0 \gamma^3$ = massa longitudinale e
$m_{\perp} = m_0 \gamma$ = massa trasversa.

<u>Teorema delle Forze Vive ed equivalenza Massa-Energia:</u>

Indicando con W il lavoro e con ε l' energia si definisce il teorema relativistico dell' energia:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{def}{=} d\varepsilon \qquad (19)$$

Definendo l' energia come

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u} = m\gamma^2(u)\, \vec{u} \cdot \vec{a}$$
$$= m_0 c^2 \frac{d\gamma}{dt} \qquad (20)$$

Da cui integrando:

$$\varepsilon = m_0 \gamma c^2 + \text{costante} \qquad (21)$$

Ponendo la costante a zero e ricordando che é $m(u) = m_0 \gamma$:

$$\varepsilon = m c^2 \qquad (21')$$

La massa relativistica é dunque anche una misura dell' energia. Energia, massa e inerzia sono quindi equivalenti a meno di costanti universali.

Segue perciò dalla conservazione dell' impulso la conservazione dell' energia relativistica.

Si noti che é stata data una nuova definizione di energia. In particolare l' energia relativistica si conserva anche negli urti anelastici.

Per velocità non relativistiche si può sviluppare in serie di Taylor la (21'):

$$\varepsilon = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\, c^2 \cong$$

$$\cong \underbrace{m_0 c^2}_{\text{energia relativistica}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 u^2}_{\text{energia cinetica}} + O\left(\frac{u^4}{c^4}\right) \qquad (22)$$

In meccanica classica l'energia viene considerata sempre a meno di una costante additiva, perciò la nuova definizione di energia rimane valida anche nel limite non relativistico.

Si osservi che

$$\varepsilon^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

mentre nella fisica classica era

$$\varepsilon_k = \frac{p^2}{2m_0}$$

Valgono inoltre le relazioni:

$$\frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{\vec{p}}{\varepsilon} c^2 = \vec{u}$$

$$p^\mu = m_0 U^\mu = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right)$$

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 U^\mu U_\mu$$

$$= m_0^2 c^2$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{c^2} - p^2$$

Pisa 24 Ottobre 2007

Dinamica Relativistica:

Le quantità:

$$\vec{p} = m_0 \gamma(u) \vec{u} \qquad (1.1)$$

$$\varepsilon = m_0 \gamma(u) c^2 \qquad (1.2)$$

$$p^\mu = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right) \qquad (1.3)$$

Sono conservate in tutti i processi fisici, e le loro leggi di conservazione sono fondamentali per tutta la fisica.

Le trasformazioni di tali quantità derivano dalla loro definizione:

$$\varepsilon' = \gamma(v)\left[\varepsilon - \vec{v}\cdot\vec{p}\right] \qquad (2.1)$$

$$\begin{cases} p'_x = \gamma(v)\left[p_x - \frac{v}{c^2}\varepsilon\right] \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \end{cases} \qquad (2.2)$$

Valgono inoltre le relazioni

$$\varepsilon'^2 - \vec{p}'^2 c^2 = \varepsilon^2 - \vec{p}^2 c^2 = m_0^2 c^4 \qquad (3)$$

$$F = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad , \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{u} \qquad (4)$$

Si può introdurre una forza quadrivettoriale

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{dU^\mu}{d\tau} = m_0 a^\mu \stackrel{def}{=} F^\mu \qquad (5)$$

La quadriforza ricorda in forma $\vec{F} = m\vec{a}$, ma ha un significato diverso. In componenti:

$$F^\mu = \left(\gamma(v)\frac{\vec{F}\cdot\vec{u}}{c} \; , \; \gamma(v)\vec{F}\right) \qquad (6)$$

Dalle (1.1) e (1.2) si può osservare come le leggi di conservazione di impulso e di energia sono intimamente legate e come le loro leggi di trasformazione non sono reciprocamente indipendenti.

La legge di conservazione dell' energia relativistica é assicurata in meccanica classica dalla legge di conservazione della massa.

Si era già trovato che $a^\mu U_\mu = 0$. Segue da questo che

$$F^\mu U_\mu = 0 \tag{7}$$

valida per ogni particella dotata di massa costante.

Onde e Particelle:
Abbiamo definito il quadrivettore d' onda come

$$K^\mu = \left(\frac{\nu}{c} , \frac{\nu}{w} \cdot \hat{n} \right) \tag{8}$$

Nella meccanica quantistica vengono associate alle quantità dinamiche delle proprietà ondulatorie, mediante la seguente relazione:

$$P^\mu = \underbrace{h}_{\text{costante di Planck}} K^\mu \tag{9}$$

Questa relazione é invertibile, e ci porta ad associare una natura particellare alle quantità ondulatorie, mediante la relazione

$$\varepsilon = h\nu \tag{10}$$

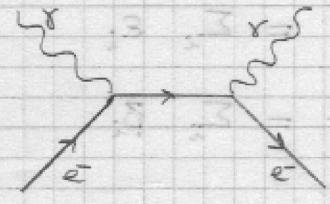
La (9) e la (10) sono la chiave per passare dalla luce come onda elettromagnetica ai fotoni. Possiamo quindi definire una quantità di moto per un'onda elettromagnetica e viceversa:

$$\vec{p} = h\frac{\nu}{w}\,\hat{n} \tag{11}$$

$$\nu\lambda = w \tag{12}$$

$$\boxed{\vec{p} = \frac{h}{\nu} \iff \lambda = \frac{h}{\vec{p}}} \quad \text{(Relazione di De Broglie (13)}$$

L' attribuzione di una natura particellare alla luce ha favorito lo studio delle interazioni luce-materia, nelle quali é conservato il quadrimpulso.



Confrontando la (11) con

$$\frac{\vec{v}}{c^2} = \frac{\vec{p}}{\varepsilon} \qquad (14)$$

segue

$$\frac{\vec{v}}{c^2} = \frac{\vec{p}}{\varepsilon} = \frac{\hat{n}}{\omega} \qquad (15)$$

ossia la velocità della fase dell'onda associata ad una particella é sempre maggiore di c.

Nel caso del fotone, che viaggia esattamente a c, si ha

$$p^\mu p_\mu = 0 \qquad \text{(per un fotone)} \qquad (16)$$

da cui segue che la massa a riposo del fotone deve essere nulla. Vale anche l'inverso: se una particella ha massa a riposo nulla, la velocità della sua onda associata deve essere c.

Equivalenza Massa - Energia nei Sistemi Dinamici:

Nella meccanica classica si era definito il centro di massa di un sistema usando le posizioni delle componenti del sistema ad uno stesso istante, usando quindi il concetto di simultaneità, che si é visto essere privo di significato in meccanica relativistica. Ne consegue che il centro di massa di un sistema non sarà descritto da quantità covarianti: la trasformata di un centro di massa non sarà il centro di massa delle trasformate dei punti del sistema.

Prendiamo allora un sistema di punti materiali e definiamo il quadrimpulso totale come soma dei quadrimpulsi delle singole particelle.

$$P^\mu = p_1^\mu + \dots + p_n^\mu \qquad (17)$$

A partire dalla (17) possiamo definire energia e quantità di moto di una particella equivalente al nostro sistema:

$$E = \Sigma_i \; \varepsilon_i \qquad (18.1)$$

$$\vec{P} = \Sigma_i \; \vec{p}_i \qquad (18.2)$$

Era già stato osservato l'invarianza di

$$P^{\mu} P_{\mu} = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2 \tag{19}$$

Dalla quale segue che

$$\frac{E^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} \left(\Sigma_i \; \mathcal{E}_i \right)^2 \equiv$$

$$\equiv \left(\Sigma_i \sqrt{\vec{p}_i^2 + m_{0i}^2 c^2} \right)^2 \geqslant \quad \text{credo disuguaglianza di Schwartz} \tag{20.1}$$

$$\geqslant \left(\Sigma_i \; p_i \right)^2 + \left(\Sigma_i \; m_{0i} \right)^2 c^2 \tag{20.2}$$

Dalla (20.2) si può definire la massa equivalente del sistema a partire dal quadrimpulso:

$$M_0^2 c^2 \stackrel{def}{=} \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \geqslant \left(\Sigma_i \; m_{0i} \right)^2 c^2 \tag{21}$$

$$\Rightarrow M_0 = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2} = \frac{E}{c^2} \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}} \tag{21'}$$

Si nota subito che

$$M_0 \geqslant \left(\Sigma_i \; m_{0i} \right) \tag{22}$$

La massa equivalente del sistema è maggiore della somma delle masse delle singole particelle perché incorpora anche l'energia cinetica dovuta al moto relativo delle stesse. L'energia rimanente costituisce l'energia cinetica del sistema equivalente (energia cinetica del centro di massa).

Si è visto che non è possibile stabilire un centro di massa, ma definendo un sistema SR in cui esso è in quiete si può calcolare la massa a riposo del sistema.

La velocità del centro di massa sarà

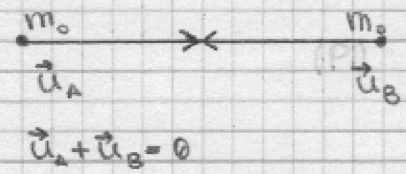
$$\vec{u} = \frac{\vec{P}}{E} c^2 \tag{23}$$

Non sarà tuttavia possibile stabilire la posizione del C.M.

Nel sistema in cui il C.M. è in quiete

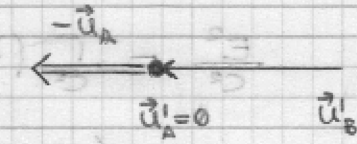
$$M_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \underbrace{\cancel{\vec{P}}}_{=0} \tag{24}$$

Dinamica dei Corpi Estesi:



Esaminiamo un urto perfettamente anelastico nel sistema di riferimento simmetrico. Le particelle dopo l' urto rimarranno attaccate insieme in quiete.

Esaminiamo ora lo stesso urto nel sistema in cui la particella A è in quiete ($\vec{V} = \vec{u}_A$).



Sarà allora:

$$\begin{cases} u'_A = 0 & (25.1) \\ u'_B = \dfrac{\vec{u}_B - \vec{V}}{1 - \frac{\vec{u}_B \cdot \vec{V}}{c^2}} = -\dfrac{2V}{1 + \frac{V^2}{c^2}} & (25.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m'_A = m_o & (26.1) \\ m'_B = \gamma(u'_B)\, m_o = \dfrac{1 + \frac{V^2}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, m_o & (26.2) \end{cases}$$

Scriviamo la conservazione della quantità di moto:

$$\underbrace{\cancel{m'_A u'_A}}_{=0} + m'_B u'_B = -M' \vec{V} \qquad (27)$$

$$-m_o \frac{\cancel{1 + \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{2V}{\cancel{1 + \frac{V^2}{c^2}}} = -M' \vec{V} \qquad (27')$$

$$\Rightarrow M' = \frac{2 m_o}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \qquad (28)$$

Ricordando che è $\quad M' = M_o \gamma(V)$

$$M_o = \frac{2 m_o}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 2 m_o \gamma(V) \qquad (29)$$

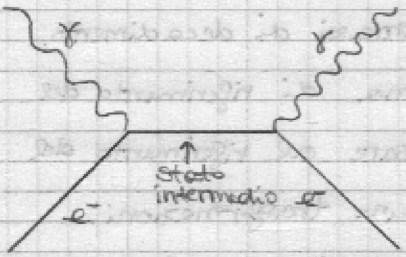
Perciò la massa totale è uguale alla somma delle energie diviso c^2.

I processi anelastici sono conservativi dell' energia.

In tutti gli esperimenti fin'ora osservati, la non conservazione della massa (o dell' energia) ha implicato l' emissione di radiazione o particelle che non eravamo però in grado di rilevare. Fu scoperto in questo modo il neutrino.

Effetto Compton:

Collisione quantistica - relativistica di un elettrone con un'onda elettromagnetica.



Indichiamo con P^μ il quadrimpulso dell'elettrone. Gli apici indicano le quantità dopo l'urto.

$$P^\mu + hK^\mu = P'^\mu + hK'^\mu \qquad (30)$$

$$P'^\mu = P^\mu + hK^\mu - hK'^\mu \qquad (30')$$

$$P'^\mu P'_\mu = m_e^2 c^2 \qquad (31)$$

$$\cancel{P'^2} = \cancel{P^2} + \cancel{h^2K^2} + \cancel{hK'^2} + 2h(PK) - 2(PK')h - 2h^2(KK') \qquad (32)$$

= 0 perché massa elettrone = costante ($P^2 = m_e^2 c^2$)   = 0 perché massa fotone = 0

$$PK - PK' - hKK' = 0 \qquad (32')$$

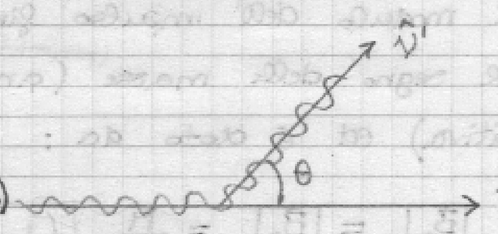
$P^\mu = (m_0 c, \vec{0})$ Perché siamo nel SR in cui l'elettrone è in quiete.

$K^\mu = \left(\frac{\nu}{c}, \frac{\vec{\nu}}{c}\right)$ $\vec{\nu} = \nu\hat{n}$

$K'^\mu = \left(\frac{\nu'}{c}, \frac{\vec{\nu}'}{c}\right)$ $\vec{\nu}' = \nu'\hat{n}'$

La (32') diventa

$$m_e\nu - m_0\nu' = h\left(\frac{\nu\nu'}{c^2} - \frac{\vec{\nu}\cdot\vec{\nu}'}{c^2}\right) \qquad (33)$$



$$\frac{m_0 c^2}{h}(\nu - \nu') = \nu\nu'(1-\cos\theta)$$

$$\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)$$

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1-\cos\theta)$$

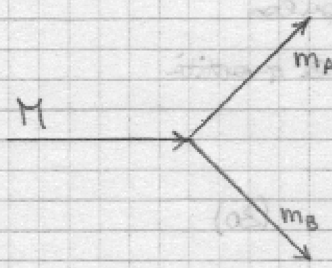
λ_c ⟶ lunghezza d'onda Compton

L'effetto Compton è più evidente con fotoni ad alta energia, ossia onde elettromagnetiche ad alta frequenza.

Pisa lì 26 Ottobre 2007

Decadimenti e Diffusione:

Decadimenti a due corpi:



In generale, per studiare i processi di decadimento, é conveniente mettersi nel sistema di riferimento del centro di massa, per poi passare al riferimento del laboratorio mediante le opportune trasformazioni. E' inoltre utile porre per praticità di calcolo $c=1$. Ove necessario sarà sufficiente un' analisi dimensionale per ripristinare le formule nel loro aspetto originario.

Dalle leggi di conservazione di impulso ed energia si ha, nel sistema del centro di massa

$$\begin{cases} \vec{p}_A + \vec{p}_B = 0 & (1.1) \\ \varepsilon_A + \varepsilon_B = M & (1.2) \end{cases}$$

dove nella (1.2) si risolve il sistema trovando:

$$\begin{cases} \varepsilon_A = \sqrt{\vec{p}_A^{\,2} + m_A^2} = \dfrac{M^2 + m_A^2 - m_B^2}{2M} & (2.1) \\ \varepsilon_B = \sqrt{\vec{p}_B^{\,2} + m_B^2} = \dfrac{M^2 + m_B^2 - m_A^2}{2M} & (2.2) \end{cases}$$

Il modulo dell' impulso finale non dovrà matematicamente dipendere dal segno delle masse (proprietà di crossing) (anche se ovviamente la massa fisica é sempre positiva) ed é dato da:

$$|\vec{p}_A| = |\vec{p}_B| = \frac{M}{2}\sqrt{\left(1-\frac{m_A+m_B}{M}\right)\left(1-\frac{m_A-m_B}{M}\right)\left(1+\frac{m_A+m_B}{M}\right)\left(1+\frac{m_A-m_B}{M}\right)} \quad (3)$$

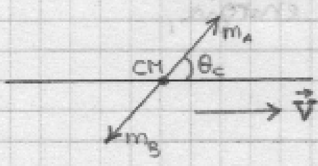
Si possono trovare alcuni invarianti di Lorentz:

$$P^\mu = p_A^\mu + p_B^\mu \quad (4)$$

$$m_B^2 = M^2 + m_A^2 - 2P^\mu p_A^\mu \quad (5)$$

$$P^\mu p_A^\mu = M\varepsilon_A^c \quad (6)$$

Passando al riferimento del laboratorio



$$\varepsilon_{Al} = \gamma(V)\left(\varepsilon_A + V\vec{p}_A\cos\theta_c\right) \quad (7)$$

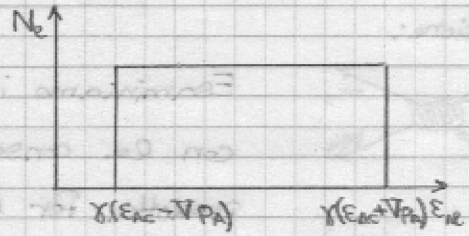
$$\Rightarrow \gamma(V)\left(\varepsilon_A - V\vec{p}_A\right) \leq \varepsilon_{Al} \leq \gamma(V)\left(\varepsilon_A + V\vec{p}_A\right) \quad (7')$$

Supponendo che le particelle prodotto abbiano una distribuzione uniforme intorno alla particella che decade, che non ci siano cioé direzioni privilegiate, sarà

$$dN_c = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2}\, d\cos\theta_c \qquad (8)$$

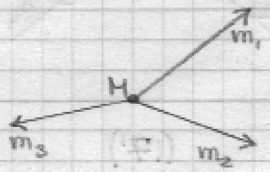
dove dN_c é la probabilità di rilevare un prodotto di decadimento emesso in una direzione compresa tra quelle individuate dall'angolo solido $d\Omega$. Passando al sistema del laboratorio:

$$dN_e = \frac{1}{2\gamma V \cdot \vec{p}_A}\, d\varepsilon_{Ae} \qquad (9)$$



Dunque in un decadimento a due corpi la distribuzione dei prodotti é uniforme nell'intervallo di energie che le particelle prodotto possono assumere.

Decadimento a tre corpi:



In generale, in un decadimento a n corpi, i gradi di libertà dinamici sono

$$(\text{d.o.f.}) = 3n \underbrace{-\ 4}_{\text{conservazione di impulso ed energia}} \underbrace{-\ \text{sim}}_{\text{Simmetrie}} \qquad (10)$$

Il quadrimpulso del sistema é:

$$P = p_1 + p_2 + p_3 \qquad (11)$$

Le seguenti sono quantità invarianti che possiamo costruire

$$P \cdot p_1 \qquad P \cdot p_2 \qquad P \cdot p_3 \qquad (12)$$

Esse non sono però quantità indipendenti, in quanto

$$P \cdot p_1 + P \cdot p_2 + P \cdot p_3 = P \cdot P = M^2 \qquad (13)$$

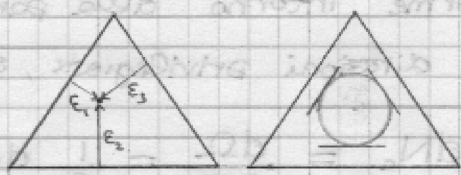
Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$M^2 + m_1^2 - 2P \cdot p_1 = m_2^2 + m_3^2 + 2\, p_2 p_3 \qquad (14)$$

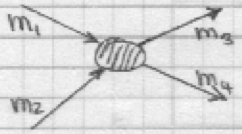
$$P \cdot p_1 = M\, \varepsilon_{1c} \qquad (15)$$

$$\varepsilon_{1c} + \varepsilon_{2c} + \varepsilon_{3c} = M \qquad (16)$$

La (16) ci dice che la somma delle energie dei prodotti rimane costante, proprio come la somma delle distanze di un punto interno a un triangolo equilatero. E' dunque possibile rappresentare gli stati finali del sistema mediante un punto interno al triangolo (diagrammi di Dalitz - Fabri). Non tutte le le configurazioni sono però possibili. I casi limite sono quelli in cui i prodotti sono collineari e il moto é dunque unidimensionale.

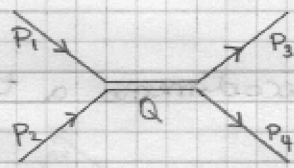


Diffusione:



Esaminiamo il processo di collisione di due particelle, con la conseguente formazione di altre due particelle prodotto. Per la conservazione dell'impulso si ha

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \tag{17}$$



Possiamo però immaginare che le particelle 1 e 2 formino uno stato intermedio prima di decadere nelle particelle 3 e 4:

$$p_1 + p_2 = Q = p_3 + p_4 \tag{17'}$$

Si può definire l'energia della particella fittizia Q come

$$\varepsilon_Q = \sqrt{Q^2} = \sqrt{(p_1+p_2)^2} \tag{18}$$

cioé come la somma delle energie delle particelle 1 e 2. Ci si riconduce così al caso di un decadimento a due corpi. Il centro di massa del sistema si muoverà con velocità

$$\vec{V} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{\vec{p}_3 + \vec{p}_4}{\varepsilon_3 + \varepsilon_4} \tag{19}$$

Un processo di collisione può anche essere parametrizzato mediante le variabili di Mandelstam:

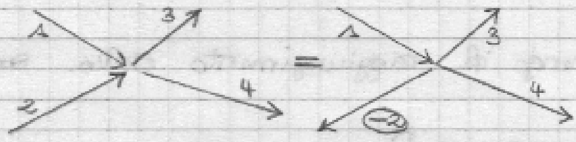
$$\begin{cases} s \overset{def}{=} (p_1+p_2)^2 = (p_3+p_4)^2 = E_c^2 & (20.1) \\ t \overset{def}{=} (p_1-p_3)^2 = (p_2-p_4)^2 & (20.2) \\ u \overset{def}{=} (p_1-p_4)^2 = (p_2-p_3)^2 & (20.3) \end{cases}$$

che sono legate tra loro dalla relazione

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \qquad (21)$$

Fissati energia e angolo di diffusione (oppure fissate due delle variabili di Mandelstam), un processo di collisione è dinamicamente determinato.

Nello studio dei decadimenti e delle collisioni abbiamo cambiato il segno di alcuni quadrimpulsi. Così facendo otteniamo delle particelle con energia negativa, che nella teoria quantistico-relativistica corrispondono a delle particelle con energia positiva ma con il tempo retrogrado: le antiparticelle. È così che la collisione delle particelle 1 e 2 a originare le particelle 3 e 4 può essere ricondotta al decadimento della particella 1 nelle particelle 3 e 4 e nell' antiparticella −2



Ponendosi nel sistema di riferimento del laboratorio, in cui una delle due particelle è ferma, la velocità che le due particelle che collidono possiedono una relativamente all'altra deve essere invariante. Valgono dunque le seguenti relazioni:

$$p_1 \cdot p_2 = \varepsilon_{1e}\ m_2 \qquad (22.1)$$

$$\varepsilon_{1e} = \frac{m_1}{\sqrt{1 - V_{rel}^2}} \qquad (22.2)$$

$$\Rightarrow p_1 \cdot p_2 = \varepsilon_{1e}\ m_2 = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{1 - V_{rel}^2}} \qquad (23)$$

da cui

$$\vec{V}_{rel} = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(p_1 \cdot p_2)^2}} \qquad \text{ma } p^\mu = (m\gamma c,\ m\gamma \vec{v})$$

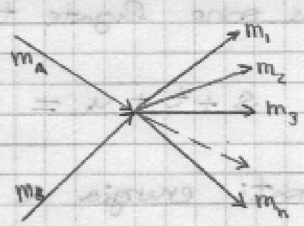
$$= \sqrt{1 - \frac{1}{(u_1 \cdot u_2)^2}} = \sqrt{\frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)^2}{1 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)}} \qquad (24)$$

Ripristinando c :

$$\vec{v}_{rel} = \sqrt{\frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2}{c^2}}{1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}}} \qquad (25)$$

da cui è subito visibile che nel limite non relativistico la velocità relativa torna ad essere $\vec{v}_{rel} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$

Considerando il caso di una collisione con la formazione di n prodotti, definiamo la quantità



$$\Delta M = \sum_{i=1}^{n} m_i - (m_A + m_B) \qquad (26)$$

Se $\Delta M < 0$, i prodotti sono meno energetici dei reagenti, e la reazione può avvenire.

Se al contrario $\Delta M > 0$ esisterà una soglia di reazione: le particelle che vanno a collidere dovranno avere sufficiente energia perchè la reazione avvenga e sia colmato il deficit di massa.

Imponendo il raggiungimento della soglia di reazione $\varepsilon^{(th)}$ sarà allora:

$$P_A + P_B = P \qquad (27)$$

$$P_A^2 + P_B^2 + 2\, P_A \cdot P_B = P^2 \qquad (28)$$

esplicitando la seconda

$$m_A^2 + m_B^2 + 2\, \varepsilon_{Ae}^{(th)} \cdot m_B = (m_A + m_B + \Delta M)^2 \qquad (29)$$

$$\cancel{m_A^2} + \cancel{m_B^2} + 2\, \varepsilon_{Ae}^{(th)} \cdot m_B = \cancel{m_A^2} + \cancel{m_B^2} + \Delta M^2 + 2 m_A m_B + 2 m_A \Delta M + 2 m_B \Delta M$$

$$2\, \varepsilon_{Ae}^{(th)} \cdot m_B = \Delta M^2 + 2(m_A m_B + m_A \Delta M + m_B \Delta M) \qquad (29')$$

da cui

$$\varepsilon_{Ae}^{(th)} - m_A c^2 = \Delta M c^2 \left(1 + \frac{m_A}{m_B} + \frac{\Delta M}{2 m_B}\right) \qquad (30)$$

ΔM va come $\frac{1}{c^2}$. Si riconosce allora il caso limite classico

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 = \Delta \varepsilon \left(1 + \frac{m_1}{m_2} + \cancel{\frac{\Delta \varepsilon}{2 m_2 c_2}}\right) \qquad (31)$$