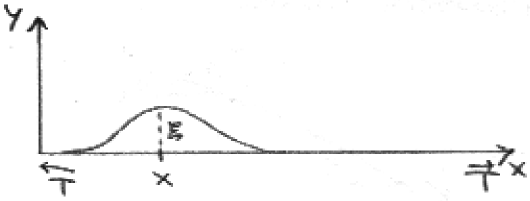
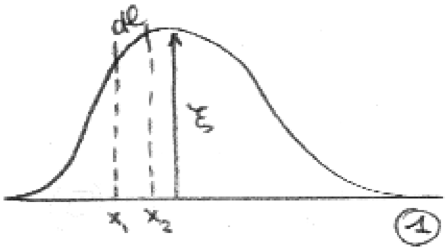
Corda Vibrante e Equazione delle Onde

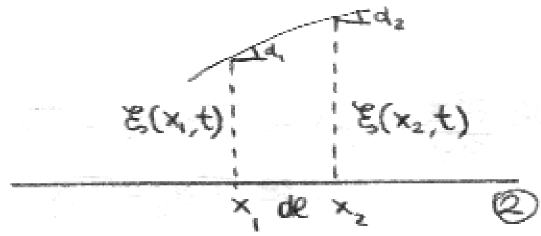


Pizzicando una corda a distanza x da un estremo ne sposto un elemento di un tratto $\xi = \xi(x,t)$ nella direzione $\hat{y}$.

Si vuole determinare l'equazione del moto della corda

Studiando le forze su un elemento di corda si ha



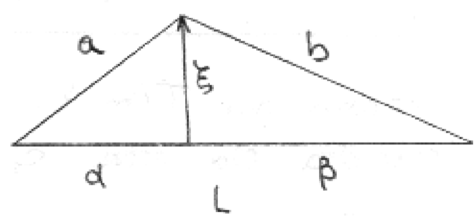


Dalla figura (2) si vede che

$$\tan[\alpha(x,t)] \equiv \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t) \qquad (1)$$

$\alpha(x,t) \approx$ approssimando al prim'ordine in α

Pizzicando la corda, questa si allunga



$$L = \alpha + \beta \rightarrow \mathcal{L} = a + b \qquad (2)$$

Ma per il teorema di Pitagora si ha che

$$\mathcal{L} = a + b = (\alpha^2 + \xi^2)^{1/2} + (\beta^2 + \xi^2)^{1/2}$$

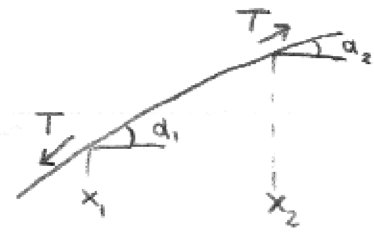
$$\approx \left(\alpha + \frac{\xi^2}{2\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{\xi^2}{2\beta}\right) + o(\xi^2)$$

$$\approx L + \frac{\xi^2 L}{2\alpha\beta} + o(\xi^2) \qquad (3)$$

L'allungamento è dunque trascurabile per $|\xi| << L$, cioè la lunghezza della corda è rimasta invariata a meno di termini quadratici in ξ.

In questa approssimazione la tensione agli estremi della corda varia in direzione ma non in modulo.

Si può già osservare che la forza risulterà nulla se gli angoli α_1 e α_2 sono congruenti. La forza dipenderà allora da $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$



La forza lungo x é:

$$m\,d\ell\,\ddot{x} = T\cos\alpha_2 - T\cos\alpha_1 \qquad (4)$$

$$\approx 0 \quad \text{al prim'ordine}$$

$m = \frac{\text{massa}}{\text{lungh.}}$

Lungo y:

$$m\,d\ell\,\ddot{y} = m\,d\ell \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x,t) = T\sin\alpha_2 - T\sin\alpha_1$$

$$\approx T\alpha_2 - T\alpha_1 \qquad (5)$$

Al limite per $d\ell \to 0$

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x,t)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x,t) - \frac{T}{m}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x,t) = 0} \qquad \text{eq. d'onda} \qquad (6)$$

Notiamo che T/m ha le dimensioni di una velocità quadra, sia essa c_s. Scriviamo allora

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x,t) - c_s^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x,t) = 0 \qquad (7)$$

Questa é un'equazione iperbolica, che da origine a una soluzione evolutiva (a differenza dell'equazione di Poisson del potenziale, che aveva il segno +, era dunque un'equazione ellittica e la soluzione era statica).

Le soluzioni dell'equazione delle onde sono della forma

$$\xi = \xi_1(x - c_s t) + \xi_2(x + c_s t) \qquad (8)$$

dove $\xi_{1,2}$ sono due funzioni che danno la forma dell'onda per $t=0$ e si propagano con velocità c_s nei due versi uguali a se stesse.

Cambiando variabili: $\eta = x - c_s t$ (9)

$\theta = x + c_s t$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} = c_s\left(-\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \theta} \qquad (10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = c_s^2\left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \theta}\right] \qquad (11)$$

Moltiplicando la (10) per c_s^2 e sottraendole la (11) si ottiene

$$c_s^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 4c_s^2\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \theta} \qquad (12)$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \theta}\xi(x,t) = 0 \qquad (13)$$

che ha per soluzione

$$\xi = \xi_1(\eta) + \xi_2(\theta)$$

Le onde sono caratterizzate da due velocità: la velocità fisica di oscillazione $\frac{d\xi}{dt}$ e la velocità di propagazione c_s.

Nelle onde di taglio le due velocità sono ortogonali tra loro, mentre nelle onde di compressione hanno la stessa direzione

Perché valga l'approssimazione lineare ξ deve essere più piccola delle altre lunghezze in gioco.

Per $\alpha \ll 1$ $\qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{c_s}\frac{\partial \xi}{\partial t}$

Per risolvere l'equazione delle onde sono necessarie le condizioni iniziali su ξ e su $\dot{\xi}$, per esempio:

$$\begin{cases} \xi(x,t=0) = \xi_1(x) + \xi_2(x) \\ \dot{\xi}(x,t=0) = 0 \end{cases}$$

Pisa 14 Febbraio 2008

Onde:

Si era trovata la velocità di propagazione

$$c_s^2 = \frac{T}{m}$$

Si vede dunque che la frequenza dell'onda aumenta linearmente con la tensione e diminuisce con l'inerzia della corda.

La soluzione dell'equazione d'onda è

$$\xi = \xi_1(x - c_s t) + \xi_2(x + c_s t)$$

Un'onda è dunque una perturbazione iniziale che si propaga.

Affinché valga la approssimazione

$$\alpha \approx \frac{\partial \xi}{\partial x} << 1 \qquad \text{deve essere} \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} << c_s$$

Dove questa condizione non sia rispettata <u>non</u> valgono più le approssimazioni di linearizzazione e piccole oscillazioni.

Metodo Risolutivo per l'equazione d'onda:
Per separazione di variabili, ipotizzo che

$$\xi(x,t) = A(x)\,B(t)$$

Differenziando

$$A\frac{d^2 B}{dt^2} = c_s^2 B \frac{d^2 A}{dx^2}$$

da cui

$$\frac{1}{B}\frac{d^2 B}{dt^2} = c_s^2 \frac{1}{A}\frac{d^2 A}{dx^2}$$

Le soluzioni saranno dunque costanti:

$$\frac{1}{B}\frac{d^2 B}{dt^2} = k^2$$

$$\frac{1}{A}\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{k^2}{c_s^2}$$

dove k è una costante reale positiva.

La soluzione sarà allora

$$A = A_+ e^{\frac{k}{c_s}x} + A_- e^{-\frac{k}{c_s}x}$$

Questa soluzione però non é tanto comoda perché diverge. Scegliamo allora delle soluzioni costanti complesse $(k^2<0)$ Allora

$$A = A_+ e^{i\frac{|k|}{c_s}x} + A_- e^{-i\frac{|k|}{c_s}x}$$

$$B = B_+ e^{i|k|t} + B_- e^{-i|k|t}$$

Perciò

$$A(x)\,B(t) = \left(A_+ e^{i\frac{|k|}{c_s}x} + A_- e^{-i\frac{|k|}{c_s}x}\right)\left(B_+ e^{i|k|t} + B_- e^{-i|k|t}\right)$$

Ma ξ é reale, quindi sembra inopportuno usare i complessi. Ma usando la formula di Eulero si vede che anche l' espressione trovata é reale ed e combinazione di seni e coseni.

Gli esponenziali complessi sono utili nelle equazioni lineari. Bisogna fare molta attenzione nelle equazioni non lineari.

Sviluppando il prodotto

$$A(x)B(t) = A_+B_+ e^{i\left(\frac{x}{c_s}+t\right)|k|} + A_-B_- e^{-i|k|\left(\frac{x}{c_s}+t\right)} +$$

$$+ A_+B_- e^{i|k|\left(\frac{x}{c_s}-t\right)} + A_-B_+ e^{-i|k|\left(\frac{x}{c_s}-t\right)}$$

prendo la parte reale

$$= (A_+B_+ + A_-B_-)\cos\left[|k|\left(\frac{x}{c_s}+t\right)\right] +$$

$$+ (A_+B_- + A_-B_+)\cos\left[|k|\left(\frac{x}{c_s}-t\right)\right]$$

$$= \xi_+ \cos\left[k(x+c_s t)\right] + \xi_- \cos\left[k(x-c_s t)\right]$$

dove $k = \frac{|k|}{c_s}$ e $\xi_{1,2}$ sono ampiezze di oscillazione reali.

Questa é un' onda monocromatica. Si vede che $k\,c_s$ ha le dimensioni di $[T]^{-1}$, quindi rappresenta la pulsazione.

Provare a mettere A e B complessi
devono comparire le fasi nei coseni

Un' onda monocromatica é bella per fare i conti ma non esiste in natura e si estenderebbe in tutto lo spazio e il tempo. La soluzione con le funzioni arbitrarie del tipo

$$\xi(x,t) = \xi_1(x - c_s t) + \xi_2(x + c_s t)$$

é limitata nel tempo e nello spazio e rappresenta meglio la realtà.

Mediante la trasformata di Fourier e grazie al principio di sovrapposizione le due soluzioni sono equivalenti.
La funzione arbitraria ξ_i può essere scritta come serie di funzioni seno e coseno.
L' interferenza é l' espressione fisica del principio di sovrapposizione.

Nelle onde monocromatiche, c_s é detta velocità di fase

Generalmente si scrive

$$\xi \cos\left[kx + \omega t\right]$$

$$\omega = k c_s \qquad \text{relazione di dispersione}$$

$$k = \text{numero (o vettore) d' onda}$$

Se mi sposto sulle x di

$$x \rightarrow x + \frac{2\pi}{k}$$

vedo la stessa forma d' onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

é detta lunghezza d' onda.
Allo stesso modo, sull' asse del Tempo:

$$T\omega = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{periodo}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \text{frequenza.}$$

Problema:

Se perturbo la corda in un solo punto, evidentemente non sarà molto utile usare i seni e i coseni.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

Sia $\Xi(x) = \xi(x, t=0)$

$$\xi_1(x) + \xi_2(x) = \Xi(x)$$

Inserendo anche la condizione di velocità iniziale nulla

$$\dot{\Xi}(x) = 0$$

si ha

$$-\xi_1'(x) + \xi_2'(x) = 0 \qquad \xi' = \frac{\partial \xi}{\partial(x \pm c_s t)} \quad \text{derivata rispetto all'argomento}$$

$$\Rightarrow \xi_1'(x) = \xi_2'(x)$$

$$\Rightarrow \xi_1(x) = \xi_2(x) = \frac{1}{2}\Xi(x)$$

Perciò si ha l'equazione

$$\xi(x,t) = \frac{1}{2}\Xi(x - c_s t) + \frac{1}{2}\Xi(x + c_s t)$$

trovare condizione per $\xi_2 = 0$

Battimenti, Interferenza e sovrapposizione:

Poniamo x = costante $= 0$. Otteniamo

$$\xi = \xi_0 \cos(c_s t)$$

Provo ad aggiungere un altro termine

$$\xi = \xi_0 \cos(c_s t) + \xi_1 \cos(\omega_1 t)$$

Sia $\xi_1 = \xi_0 = \bar{\xi}$ provare per ampiezze arbitrarie

$$\xi = \bar{\xi}\left[\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t)\right]$$

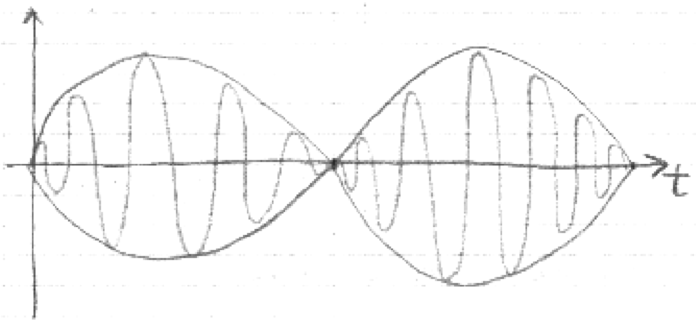
Si hanno battimenti per

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_1 + \omega_0} \ll 1$$

Per le formule di prostaferesi si ha

$$\mathcal{E} = 2\bar{\mathcal{E}} \cos\left(\frac{\omega_0+\omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_0-\omega_1}{2} t\right)$$

Nell' approssimazione che $\omega_1 \approx \omega_0$ si ha che il primo coseno oscilla molto più velocemente del secondo



Il tempo tra la la massima interferenza costruttiva e la massima distruttiva é il tempo affinché una frequenza acquisti una fase di $\frac{\pi}{2}$ sull' altra.

Se le ampiezze non fossero uguali non si avrebbe il battimento completo.

Il triangolo dell' esempio precedente é il risultato di infiniti battimenti, distruttivi ovunque tranne nella regione del triangolo.
Questa è la base della trasformata di Fourier.

Pisa 15 febbraio 2008

Onde

Lo spostamento ξ della corda è in generale un vettore e la direzione di ξ è detta polarizzazione

$$\vec{\xi} = (0, \ \xi_y, \ \xi_z)$$

Non essendoci una componente lungo x si hanno solo oscillazioni nel piano ortogonale alla direzione di propagazione. Si ha allora una polarizzazione trasversale (onde di taglio). Nelle onde di compressione si ha polarizzazione longitudinale.

$$\vec{\xi} = (\xi_x, \ 0, \ 0)$$

Essendo valido il principio di sovrapposizione si può sempre trattare una polarizzazione alla volta.

Le onde sonore sono onde puramente di compressione.
Le onde elettromagnetiche sono pure onde trasversali.
Alcuni mezzi permettono polarizzazione lungo tutti e tre gli assi (es. terremoti).

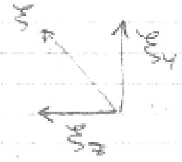
In tre dimensioni, l'equazione delle onde diventa

$$\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial x_i^2} \qquad i = 1, 2, 3$$

Consideriamo

$$\xi_y = \xi_y \cos(\omega t - kx)$$

$$\xi_z = \xi_z \cos(\omega t - kx + \varphi)$$



Se $\varphi = 0$ si ha un oscillazione a un certo angolo

Se $\varphi = \frac{\pi}{2}$ si ha un'oscillazione con polarizzazione circolare. La polarizzazione (ad ampiezze $\xi_y = \xi_z$) varia periodicamente su un cerchio.

Le soluzioni generali dell'equazione delle onde possono essere espresse nelle forme equivalenti

$$\xi = \xi_1(x - c_s t) + \xi_2(x + c_s t)$$

ξ_i funzioni nella variabile $(x \pm c_s t)$
(soluzione generale) es. $\xi_1 = A e^{-\frac{(x-c_s t)^2}{L^2}}$
gaussiana che si propaga

$$\xi = \xi_{10} \cos(\omega t - kx) + \xi_{20} \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

ξ_{i0} ampiezze , $\omega = k c_s$ parametro
(onde monocromatiche)

Ponendo nella seconda la differenza di fase $\varphi = 0$ e l'ampiezza uguale $\xi_{10} = \xi_{20} = \xi_0$ e usando le formule di prostaferesi

$$2\xi_0 \cos(\omega t)\cos(kx) = \xi \quad \text{onda stazionaria}$$

$$A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \longleftrightarrow Re\left[C_n e^{in\omega t} + D_n e^{-in\omega t}\right]$$

In notazione complessa

$$\xi = \xi_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

mettendola nell'equazione delle onde

$$-\omega^2 \xi + c_s^2 k^2 \xi = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = c_s^2 k^2$$

Trasformata di Fourier:

Come possiamo scrivere un vettore in termini delle sue coordinate rispetto a una base, vogliamo scrivere una funzione in termini di una combinazione lineare di funzioni che costituiscono un'opportuna base dello spazio delle funzioni.

Si vuole estendere il concetto della serie di Fourier alle funzioni non periodiche.
Nella serie di Fourier la base era costituita da $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$ per $n \in \mathbb{N}$.

Per ottenere la trasformata di Fourier non basta più una base numerabile, ma ne occorre una con la cardinalità del continuo $\{\cos(\alpha x), \sin(\alpha x)\}$ e si passa dunque da una serie a un integrale.

Data una funzione $\xi(t)$ si ha

$$\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\xi}(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$\hat{\xi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

La base è $\left\{ \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} \right\}_{\omega \in \mathbb{R}}$

Controllare che succede per ξ reale e riscrivere le formule per sin e cos

Per verificare che è un' identità

$$\xi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\, d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t')\, e^{i\omega t'}\, dt'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, \xi(t') \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega(t-t')}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, \xi(t')\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{delta di Dirac}}}{\delta(t-t')}$$

$$\int f(t')\, \delta(t-t')\, dt' = f(t)$$

Questo risultato permette, insieme al principio di sovrapposizione, di studiare le singole componenti monocromatiche di un' onda e poi sommarle insieme.

Una componente monocromatica è talvolta detta pacchetto d' onda.

calcolare trasformata di 

Trasformata della Gaussiana

$$\xi = e^{-\frac{t^2}{T^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/T^2 + i\omega t}\, dt$$

Completo il quadrato all' esponente $-\left[\frac{t^2}{T^2} - 2\frac{i\omega t}{2}\right]$

$$-\left(\frac{t}{T}-\frac{i\omega T}{2}\right)^2 = -\left[\frac{t^2}{T^2} - i\,\frac{\cancel{2}\omega \cancel{T}}{\cancel{2}\cancel{T}}\,t - \frac{\omega^2T^2}{4}\right]$$

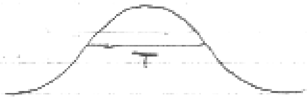
$$-\left[\frac{t^2}{T^2} - \frac{2i\omega t}{2}\right] = -\left(\frac{t}{T}-\frac{i\omega T}{2}\right)^2 - \frac{\omega^2T^2}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/T^2 + i\omega t}\, dt = e^{-\frac{\omega^2T^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{T}-\frac{i\omega T}{2}\right)^2} dt$$

$$= \frac{T}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{\omega^2T^2}{4}}$$

Se supponiamo che la nostra gaussiana avesse il giusto coefficiente di normalizzazione a moltiplicare

$$e^{-\frac{t^2}{T^2}} \rightarrow e^{-\frac{\omega^2T^2}{4}}$$



Se il segnale é molto largo, la trasformata sarà quasi monocromatica.
Se il segnale é molto stretto ci sarà bisogno di molte frequenze della base per rappresentarlo.

Pisa 18 Febbraio 2008

Onde Forzate:

Data l' equazione d' onda

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

Vogliamo aggiungere un termine forzante $S(x,t)$

Oltre alle condizioni iniziali bisogna imporre le condizioni al bordo (per esempio gli estremi di una corda devono rimanere fissati).

$S(x,t)$ é il termine sorgente e bisognerà determinare la sua forma. Già sappiamo che dovrà avere le dimensioni di un' accelerazione.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = S(x,t)$$

Nella realtà la corda vibrante ha dei termini di smorzamento. La corda vibrante é un' oscillatore accoppiato al gas che la circonda.

La soluzione dell' equazione con il termine sorgente sarà la soluzione dell' omogenea più una soluzione particolare.

$$\xi(x,t) = \xi_1(x - c_s t) + \xi_2(x + c_s t)$$

$$\xi(x,t) = \xi_{01} \cos(\omega t - kx) + \xi_{02} \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

$$\text{con} \quad \frac{\omega}{k} = c_s$$

Per la seconda scrittura, la condizione di linearizzazione si può anche scrivere come

$$\xi \ll \lambda$$

Sono detti mezzi non dispersivi i mezzi in cui la velocità di propagazione c_s é indipendente dalla frequenza ω

Trasformata di Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \, dk$$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, e^{-ikx} \, dx$$

x e k sono dette variabili coniugate.
Per funzioni di più variabili si può fare la trasformata rispetto alle singole componenti.

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\vec{k}) \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \, d^3k$$

La trasformata di Fourier di una derivata f' è la trasformata di f moltiplicata $\pm ik$ (a seconda delle convenzioni).

Nei mezzi dispersivi, la scomposizione in componenti monocromatiche torna utile perché la propagazione dipende dalla frequenza.

risolvere $m\ddot{x} + kx = F(t)$ con  $f(t)$
con la trasformata e verificare che $x(t) \neq F(t)$

Trasformata della Gaussiana

$$e^{-\frac{x^2}{L^2}} \longleftrightarrow \alpha \, e^{-\frac{k^2L^2}{4}}$$

Nota: La Trasformata di Fourier conserva la norma

$$\int |\xi(x)|^2 dx = \int |\hat{\xi}(k)|^2 dk$$

La trasformata della Gaussiana così come l'abbiamo calcolata centra le frequenze in $k = 0$
Cerchiamo una trasformazione che manda la nostra funzione in

$$e^{-\frac{(k-k_0)^2 L^2}{4}}$$

La quantità $k_0 L$ da un indice di quanto sia larga la campana gaussiana. Per $k_0 L \gg 1$ la gaussiana vale circa zero.

Antitrasformiamo per vedere quale funzione ha per trasformata $e^{-\frac{(k-k_0)^2 L^2}{4}}$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2 L^2}{4} + ikx} \, dk$$

cambiando variabile

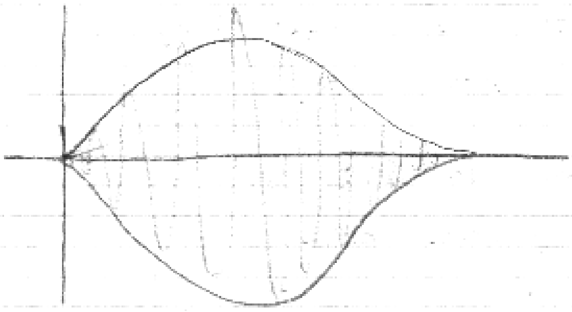
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2 L^2}{4} + i(k-k_0)^2 x} \, e^{ik_0 x} \, d(k-k_0)$$

$$= e^{ik_0x} \, e^{-\frac{x^2}{L^2}}$$

prendendo la parte reale

$$= \cos(k_0 x) \, e^{-\frac{x^2}{L^2}}$$

Questa funzione é un oscillazione cosenoidale modulata dentro una campana gaussiana



$k_0 L$ é il numero di oscillazioni all' interno della gaussiana

Per $L \to +\infty$ si ha un'onda monocromatica (L misurato in lunghezze d'onda).

Questo oggetto é detto pacchetto d'onda.

Consideriamo un pacchetto gaussiano che per semplicità imponiamo che si propaghi tutto nel verso positivo delle $\hat{x}$.

$$\xi(x,t) = e^{-\frac{x^2}{L^2} + ik_0 x} \qquad \text{a } t=0$$

$$x \to x - c_s t$$

$$\xi(x,t) = e^{-\frac{(x-c_s t)^2}{L^2} + ik_0(x-c_s t)} \qquad (*)$$

$$\dot{\xi}(x,t) = \left[2\frac{(x-c_s t)}{L^2} c_s - ik_0 c_s \right] e^{-\frac{(x-c_s t)^2}{L^2} + ik_0(x-c_s t)}$$

prendendo la sola parte reale

In (*) si vedono le velocità dell' inviluppo gaussiano e della portante (oscillazione all' interno). Nei mezzi non dispersivi esse coincidono.

Nei mezzi dispersivi le due velocità sono diverse e sono dette velocità di gruppo e velocità di fase.

Riflessione:

Prendiamo una corda grossa e una corda più sottile attaccate insieme.

Se nella prima corda si propaga un'onda che giunge alla discontinuità, parte dell'onda torna indietro, parte continua sull'altra corda.

Si può usare questo modello se la proprietà (in questo caso massa per unità di lunghezza) varia molto in uno spazio piccolo rispetto alla lunghezza d'onda.

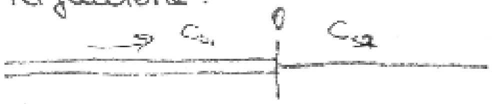
Quando si ha una discontinuità si fa ricorso a due approssimazioni: l'approssimazione impulsiva (la discontinuità é quasi immediata) e l'approssimazione adiabatica (il cambiamento é molto lento).

Nel caso di un pendolo a lunghezza variabile, se la lunghezza varia di δl, la frequenza varia di $\delta\omega \sim \varepsilon$ (molto lentamente). Allora il rapporto energia su frequenza varia molto più lentamente

$$\delta\left(\frac{E}{\omega}\right) \sim \varepsilon^2$$

Pisa 22 Febbraio 2008

Riflessione:



Consideriamo il caso in cui la massa per unità di lunghezza varia con discontinuità (approssimazione impulsiva).
Per questo consideriamo una scala di variazione L trascurabile rispetto alla lunghezza d'onda dell'onda.

$$L \ll \lambda$$

Parte dell'onda si propagherà oltre la discontinuità e parte verrà riflessa indietro.
È molto utile scomporre l'onda nelle sue componenti monocromatiche.
Nell'approssimazione impulsiva il mezzo è localmente continuo, perciò

$$1)\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c_{s1}^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x < 0$$

$$2)\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c_{s2}^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x > 0$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c_s^2(x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

Le soluzioni saranno

$$1 \begin{cases} A_{in} \cos(\omega_{in} t - k_{in} x) & \text{onda incidente} \\ A_r \cos(\omega_r t - k_r x + \varphi) & \text{onda riflessa} \end{cases}$$

$$2 \left\{ A_t \cos(\omega_t t - k_t x + \psi) \right. \qquad \text{onda trasmessa}$$

È banalmente vero che

$$\frac{\omega_{in}}{k_{in}} = \frac{\omega_r}{k_r} = c_{s1}$$

$$\frac{\omega_t}{k_t} = c_{s2}$$

La soluzione deve essere continua in $x = 0$, altrimenti la corda si spezza, cioè $\xi(x<0,t) = \xi(x>0,t)$:

$$A_{in} \cos(\omega_{in} t - k_{in} x)\Big|_{x=0} + A_r \cos(\omega_r t - k_r x + \varphi)\Big|_{x=0} = A_t \cos(\omega_t t - k_t x + \psi)\Big|_{x=0}$$

$$\forall t$$

Da questa condizione risulta che

$$\omega_{in} = \omega_r = \omega_t$$

$$\varphi = \psi = 0$$

La derivata prima dello spostamento deve essere continua.

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_{0^-} = \left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_{0^+}$$

Infatti

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad (*)$$

integrando in un intervallo infinitesimo delle x centrato in $x = 0$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sim \varepsilon$$

e nel limite per $\varepsilon \to 0$ segue la tesi.

La derivata seconda é invece sicuramente discontinua, come si vede da $(*)$.

k é sicuramente discontinua perché $c_s(x)$ lo é.

Vediamo che ci deve per forza essere un' onda riflessa.
Se per assurdo non ci fosse:

$$\xi \text{ continua} \Rightarrow A_i \cos(\omega_i t - k_i x)\Big|_{x=0} = A_t \cos(\omega_t t - k_t x)\Big|_{x=0}$$

$$\Rightarrow \text{ma } \omega_i = \omega_t \text{ quindi } A_i = A_t$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \text{ continua} \Rightarrow k_i A_i = k_t A_t \Rightarrow k_i = k_t \text{ assurdo.}$$

Dalle condizioni di raccordo con l' onda riflessa segue

$$A_i + A_r = A_t$$

$$k(A_i + A_r) = k_t A_t$$

Risolvendo

$$A_t = \frac{2k}{k + k_t} A_{in}$$

$$A_r = \frac{k - k_t}{k + k_t} A_{in}$$

Per $c_{s2} \to 0$ $\quad k_t = \frac{\omega}{c_{s2}} = \infty$

la trasmissione è nulla e $A_r = -A_{in}$ (nodo a $x=0$)

Per $c_{s2} \to \infty$ $\quad k_t = \frac{\omega}{c_s^2} \to 0$

$A_t = 2A_{in}$ e $A_r = A_i$ (ventre a $x=0$)

Notiamo che questi ultima non é una violazione della conservazione dell' energia perché la condizione $c_{s2} = \infty$ implica che $m_2 = 0 \Rightarrow E = 0$.

Modi Discreti:

farlo in serie di fourier

Il pacchetto tornerà riflesso a testa in giù perché é l'unico modo per rispettare la condizione del nodo.

Per questo problema é sufficiente usare la Serie di Fourier, cioé un numero discreto di componenti.

Considerando una componente monocromatica devo imporre i due nodi agli estremi

imporre i nodi e verificare le armonicità

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t + kx) + B\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Questo é un problema agli autovalori: bisogna trovare gli ω che fanno diventare dipendenti le due soluzioni. Queste ω saranno tali che, imponendo un nodo, l' altro sarà automaticamente soddisfatto. Tale condizione é

$$L = \frac{n\lambda}{2}$$

Questo problema é sovradeterminato e quindi la soluzione che verifica l' equazione $\forall \omega$ é la soluzione banale $\xi(x,t) = 0$

Energia e Impulso:

Bisognerà considerare la densità di energia, perché l'energia dipende dalla posizione.

Il teorema di conservazione dell'energia è allora della forma di un'equazione di continuità.

Per una generica quantità Q

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}\Big(\underset{\substack{\uparrow \\ (\text{flusso})}}{\Phi_Q}(x,t)\Big) = 0$$

Immagino che l'onda sia generata da una forzante. Allora l'energia fornita dalla forzante deve essere quella immagazzinata nell'onda.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

Moltiplico per la velocità:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + c_s^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right] - c_s^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] = 0$$

Questa è un'equazione di continuità. Il primo termine è composto da una sorta di energia cinetica più energia potenziale, il secondo termine è una specie di flusso.

Sostituendo a c_s^2 la sua definizione $\frac{T}{m}$ si ottiene effettivamente un energia per unità di lunghezza.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[m\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right] - T\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] = 0$$

Caso concreto:

$$\xi = \xi_1(x - c_s t)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[m c_s^2 (\xi')^2 + T(\xi')^2\right] + \frac{dT}{dx} c_s (\xi')^2 = 0$$

Pisa 25 Febbraio 2008

Densità di Energia e di Impulso:

Rideriviamo la conservazione della densità di energia:

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = F(x,t)$$

Per il teorema dell' energia moltiplico tutto per la velocità $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ e ottengo:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[m\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right] - T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \underbrace{F\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{\text{potenza fornita dall' esterno}}$$

Riscrivo in maniera più furba

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left[\frac{m}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]}_{\text{densità di energia}} - \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(T\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)}_{\text{flusso vettore}} = F\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Prendiamo per esempio un pacchetto che si propaga in una sola direzione

$$\xi(x,t) = \xi(x - c_s t)$$

Nota: L' energia é una forma quadratica, quindi l' energia di due onde non é la somma delle energie.

la densità di energia viene

$$T\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$$

Il termine di flusso é

$$-T\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x} = c_s T\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$$

Da quest' ultima relazione si vede che il flusso della densità di energia di un pacchetto che si propaga in una sola direzione é, come ci si aspettava, la densità di energia stessa che si propaga alla stessa velocità dell' onda.

Densità di Impulso

La forza esterna usata per calcolare l' energia é applicata perpendicolarmente alla corda. Vogliamo determinare la componente della forza lungo x, moltiplichiamo dunque al prim' ordine per l' angolo $\frac{\partial \xi}{\partial x}$

$$m \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = F \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$- \frac{T}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

Con un' integrazione per parti il primo termine diventa

$$m \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) - m \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x}$$

Rimettendo insieme i pezzi:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left[m \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right]}_{\text{densità d'impulso}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{T}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right]}_{\text{flusso della densità d'impulso}} = F \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Notiamo che la densità di impulso é proporzionale al flusso della densità di energia.

Soluzioni a più dimensioni:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \xi = 0$$

Soluzione monocromatica (onde piane)

$$\xi(x, y, z, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

dove $\vec{k}$ é il vettore d' onda.

Coordinate polari a simmetria sferica: Cerco un' onda sferica

Nota: Il laplaciano di uno scalare é diverso da quello di un vettore perché i versori in coordinate polari dipendono dalla posizione.

$$\xi = \xi(r, t)$$

$$-\frac{c_s^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \xi \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

qui ho moltiplicato e diviso per r^2 solo perché mi fa comodo per fare i conti dopo

Pongo $\xi = \frac{\hat{\xi}}{r}$. $\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \xi \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \hat{\xi}' - \hat{\xi} \right) = \hat{\xi}' + r \hat{\xi}'' - \hat{\xi}'$

$$- \frac{c_s^2}{r^{\cancel{2}}} \cancel{r} \hat{\xi}'' + \frac{1}{r} \ddot{\hat{\xi}} = 0$$

Per $r \neq 0$

$$\frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial r^2} = 0$$

che é il caso unidimensionale, quindi le soluzioni sono

$$\xi(r, t) = \frac{\hat{\xi}_1}{r}(r - c_s t) + \frac{\hat{\xi}_2}{r}(r + c_s t)$$

Quelle che abbiamo trattato finora sono onde non dispersive e la velocità di propagazione non dipende dalla frequenza.

Nelle onde dispersive la velocità di propagazione dipende dalla frequenza e dunque non sono invarianti in forma.
Esiste però una velocità ben precisa per ogni frequenza, dunque la serie di Fourier risulta particolarmente utile.

Mezzi dispersivi e onde di gravità:
Nelle onde del mare la forza di richiamo é data dalla gravità e dipende dalla massa. Con l' analisi dimensionale si trova che la frequenza delle onde del mare (per mare infinitamente profondo) é

$$\omega^2 = |k| g$$

$$\omega^2 = |k| g \tanh(|k| h) \quad \text{(per mare finito)}$$

Per una data ω, la velocità di propagazione é

$$c_s(\omega) = \frac{\omega}{k} = \left|\frac{g}{k}\right|^{1/2}$$

perciò le onde più lunghe viaggiano più veloce.

Vediamo che le velocità di fase e di gruppo in un mezzo dispersivo sono diverse.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2 L^2}{4}} e^{i(kx - \omega t)} \, dk \qquad \text{con } \omega = \omega(k)$$

Se il segnale é localizzato intorno a un certo k_0 posso supporre che le frequenze non varino tanto.

$$k_0 L \gg 1$$

La gaussiana é praticamente nulla fuori da un intorno di k_0. Devo allora sviluppare $\omega(k)$ intorno a k_0.
Notiamo che $\omega(k)$ é una fase, quindi sviluppando la fase bisogna stare attenti perché l' intervallo di convergenza sarà molto breve.

Pisa 29 Febbraio 2008

Onde Dispersive:

Nelle onde non dispersive si ha che la propagazione avviene ad una velocità $c_s = \omega/k$ che è indipendente dalla frequenza. Al contrario, nelle onde dispersive si ha

$$\frac{\omega}{k} = v_{ph}(\omega)$$

detta velocità di fase dell'onda.

La propagazione di un pacchetto é descritta dalla velocità di gruppo (alla quale si muove il baricentro dell'inviluppo) e dalla velocità di fase, propria dell'onda interna all'inviluppo.

Consideriamo un pacchetto d'onda gaussiano. A $t=0$ si ha

$$\xi(x, t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2 L^2}{4}} e^{ikx} \, dk$$

Il primo esponenziale definisce lo spettro in k.

Per $k_0 L \gg 1$ lo spettro in k é molto stretto e occorrono dunque poche frequenze per definire il pacchetto.

In un'onda dispersiva, per cui $\omega = \omega(k)$ si ha

$$\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2 L^2}{4}} e^{i(kx - \omega(k)t)} \, dk$$

Per $k_0 L \gg 1$ le frequenze significative sono concentrate in un intorno di k_0 di piccolo raggio. Si può dunque sviluppare $\exp[i(kx - \omega(k)t]$ in serie di Taylor. Occorre però fare attenzione perché si sta sviluppando una fase, per cui lo sviluppo sarà valido solo per un breve intervallo temporale. Considerando il seguente sviluppo

$$\cos[(\omega + \delta\omega)t] \qquad \text{per } \frac{\delta\omega}{\omega} \ll 1$$

la correzione cresce nel tempo come $t\,\delta\omega$ e quindi il risultato sarà privo di significato per tempi paragonabili a $(\delta\omega)^{-1}$ e successivi

Sviluppando la frequenza in un intorno di k_0:

$$\omega(k) = \omega_0 + \left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k=k_0}(k-k_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right|_{k=k_0}(k-k_0)^2 + o\left((k-k_0)^2\right)$$

Sostituendo nell' espressione per ξ si ottiene $\xi(x,t) \cong$

$$= e^{ik_0x - i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2L^2}{4}}\, e^{i(k-k_0)x - it\left[\frac{\partial\omega}{\partial k}(k-k_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}(k-k_0)^2\right]}\, dk$$

$$= e^{ik_0x - i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4}\left[L^2 + 2it\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right]}\, e^{i(k-k_0)\left(x - \frac{\partial\omega}{\partial k}t\right)}\, d(k-k_0)$$

Trascurando temporaneamente il termine quadratico si riconosce la velocità di gruppo $\frac{\partial\omega}{\partial k}$. Se il mezzo fosse non dispersivo $\frac{\partial\omega}{\partial k} = 0$ e come ci si aspetta sopravviverebbe solo la velocità della portante.

Dimenticando la portante e tenendo solo il termine lineare

$$\xi(x,t) = e^{-\frac{\left[x - \frac{\partial\omega}{\partial k}t\right]}{L^2}}$$

Tenendo anche il secondo ordine si ha

$$\xi(x,t) = \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\partial\omega}{\partial k}t\right)^2}{L^2 + 2it\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}}\right] = \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\partial\omega}{\partial k}t\right)^2\left[L^2 - 2it\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right]}{L^4 + 4t^2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)^2}\right]$$

Mettendo insieme anche la portante $\xi(x,t) =$

$$= \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\partial\omega}{\partial k}t\right)^2 L^2}{L^4 + 4t^2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)^2}\right]\exp\left[\frac{\left(x - \frac{\partial\omega}{\partial k}t\right)^2\, 2it\,\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}}{L^4 + 4t^2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)^2}\right]\exp\left(ik_0x - i\omega_0 t\right)$$

La larghezza dell' inviluppo non é costante e cresce come

$$\mathcal{L}^2 = \frac{L^4 + 4t^2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)^2}{L^2}$$

calcolare t tale che $\mathcal{L} = 2L$

Il pacchetto stà diffondendo, si disperde cioé con la radice quadrata del tempo.

Il secondo esponenziale é un termine correttivo oscillatorio che modula l' inviluppo, specialmente nelle code

Inserendo anche le dovute costanti di normalizzazione si vede anche che la gaussiana si abbassa (conservazione dell' energia e dell' impulso).