

Pisa 29 febbraio 2008

Risoluzione delle Equazioni di Maxwell:

Equazioni di Maxwell:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \wedge E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{omogenee}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ c^2 \nabla \wedge B - \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{J}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \text{disomogenee}$$

Le omogenee legano i campi tra di loro, le disomogenee legano i campi alle sorgenti.

Ci sono 6 componenti e 4 sorgenti (non 6 perché è implicita la conservazione della carica).

Risolvendo le equazioni per i campi si ha che i termini di sorgente dipenderanno da posizione, velocità e accelerazione delle cariche, mentre risolvendo per i potenziali i termini sorgente dipendono solo dalla posizione e dalla velocità.

Dalle equazioni omogenee si ha:

$$\nabla \cdot B = 0 \Rightarrow B = \nabla \wedge A$$

$$\nabla \wedge \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla \phi$$

Le omogenee si riscrivono quindi come

$$\begin{cases} B = \nabla \wedge A \\ E = -\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t} \end{cases}$$

Vogliamo trovare una trasformazione di gauge che renda E e B invarianti

$$\boxed{A' = A + \nabla \psi(x,t)} \quad \text{fa mantenere B}$$

$$E = -\nabla \phi' - \frac{\partial A'}{\partial t} = -\nabla \phi - \nabla \psi - \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial \nabla \psi}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \phi \rightarrow \boxed{\phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}} \quad \text{fa mantenere E}$$

Inserendo questi risultati nelle equazioni di omogenee

$$\begin{cases} -\nabla^2 \phi - \frac{\partial \nabla \cdot A}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ c^2 \nabla \wedge (\nabla \wedge A) + \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = + \frac{J}{\epsilon_0} \end{cases}$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge) = -\nabla^2 + \nabla(\nabla \cdot)$$

La seconda diventa

$$-\nabla^2 A + \nabla(\nabla \cdot A) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{J}{\epsilon_0}$$

Si vedono già i termini che danno l'equazione d'onda.

Bisogna trovare un "gauge con saggezza" tale che

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{gauge di Lorentz.}$$

Se un tale Gauge esiste, le equazioni disaccoppiano e prendono la forma delle equazioni d'onda

$$\begin{cases} -\nabla^2 \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ -\nabla^2 A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{J}{\epsilon_0} \end{cases}$$

Dimostriamo il gauge di Lorentz:

Innanzitutto esso non è in contraddizione con l'equazione di continuità. Se

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \neq 0 \quad \text{sia } = S$$

$$A = A' - \nabla \psi$$

$$\phi = \phi' + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

dove A' e ϕ' sono tali che è verificato il gauge di Lorentz.

$$\nabla \cdot A' - \nabla^2 \psi + \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] = S$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 \psi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = S$$

E per l'esistenza della equazione d'onda una tale ψ si può determinare.

Si assumerà d'ora in avanti che i potenziali soddisfino il gauge di Lorentz.

Risoluzione delle Equazioni di Maxwell

Abbiamo ricavato

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = - \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0 c^2}$$

e abbiamo fatto uso della relazione

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A})$$

Notiamo che il termine di sorgente dipende dalla posizione e dalla velocità delle cariche. Questo consente di mettersi nel sistema in cui le cariche sono in quiete e semplificarci la vita.

Equazioni delle onde per i campi:

(e ripasso di analisi vettoriale)

vettore \vec{A} , $A = \sum_{i=1}^3 A_i \vec{e}_i = A_i e_i$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_j e_i \cdot e_j = A_i B_i$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{C} \cdot \vec{D}) = A_i B_i C_j D_j$$

Consideriamo un vettore qualsiasi oggetto che si trasforma come il vettore posizione sotto il gruppo delle rotazioni.

I tensori a due indici trasformano come: (tensori simmetrici)

$$\begin{pmatrix} e_x e_x & e_x e_y & e_x e_z \\ e_y e_x & e_y e_y & e_y e_z \\ e_z e_x & e_z e_y & e_z e_z \end{pmatrix}$$

Se le componenti del tensore dipendono dalla posizione si ha un campo tensoriale

E_{ijk} tensore di Ricci (3 dimensioni)

Il gradiente è un operatore vettoriale, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Il prodotto vettoriale restituisce un tensore antisimmetrico a due indici.

Si userà la notazione $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i = \nabla_i$

Gradiente di un campo scalare

$$(\nabla\phi)_i = \partial_i \phi$$

Divergenza di un campo vettoriale

$$(\nabla \cdot \vec{A}) = \partial_i A_i$$

Prodotto vettore

$$(\vec{A} \wedge \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{per } ijk = 123 \text{ e perm. cicliche} \\ -1 & \text{per perm. dispari di } 123 \\ 0 & \text{per indice ripetuto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A \wedge B)_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ (A \wedge B)_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3 \\ (A \wedge B)_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1 \end{cases}$$

$$(A \wedge B)_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (A_j B_k - A_k B_j)$$

↑ tensore antisimmetrico,
vale in ogni dimensione con
l'opportuno tensore di ricci

Rotore di un campo vettoriale:

$$(\nabla \wedge A) = B$$

$$B_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

$$\nabla \cdot B = \partial_i B_i = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0 \quad \text{div}(\text{rot}) = 0$$

↑ tensore simmetrico
↑ tensore antisimmetrico

rot(div) = 0, infatti

$$\partial_i \phi = A_i$$

$$(\nabla \wedge A)_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k = \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = 0$$

$$(A \wedge B) \wedge C = D$$

$$\text{Si usa } \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

$$D_i = \epsilon_{ijk} (A \wedge B)_j C_k$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} A_l B_m C_k$$

permuto ciclicamente le prime 3

$$= \epsilon_{jki} \epsilon_{jlm} A_l B_m C_k$$

$$= (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) A_l B_m C_k$$

$$= (A_l C_l) B_i - (B_l C_l) A_i$$

$$= (A \cdot C) B - (B \cdot C) A$$

$$\begin{aligned}
 [\nabla \wedge (\nabla \wedge A)]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \wedge A)_k \\
 &= \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} \partial_l A_m \\
 &= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m \\
 &= (\delta_{ie} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{je}) \partial_j \partial_l A_m \\
 &= \partial_i (\partial_j A_j) - \partial_j \partial_j A_i \\
 &= \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A
 \end{aligned}$$

Una volta definite queste operazioni si può calcolare la divergenza di un tensore $\partial_j T_{ij}$ o $\partial_i T_{ij}$

$$\begin{cases}
 \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
 \nabla \cdot B = 0 \\
 \nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\
 \nabla \wedge B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{J}{c^2 \epsilon_0}
 \end{cases}$$

Applico il rotore all'ultima (sfruttando la seconda).

$$-\nabla^2 B + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{\nabla \wedge J}{c^2 \epsilon_0} \quad \text{eq. per B rifer. i conti}$$

Applico il rotore alla terza

$$\begin{aligned}
 -\nabla^2 E + \nabla(\nabla \cdot E) &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial J}{\partial t} \\
 -\nabla^2 E + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= -\frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial J}{\partial t} - \nabla \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{eq. per E}
 \end{aligned}$$

I termini di sorgente dipendono anche dall'accelerazione delle cariche.

Come sono fatte le onde elettromagnetiche nel vuoto?

Prendo un'onda piana tridimensionale

$$E_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t}$$

Ma essendo nel vuoto vale

$$\begin{cases}
 \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 & \text{verificare} \\
 \vec{k} \cdot \vec{B} = 0
 \end{cases}$$

Da questo segue che le onde elettromagnetiche sono onde trasversali in cui E e B sono ortogonali alla direzione di propagazione.

Scelgo $k = k_x$ (posso farlo perché il mezzo è isotropo e quindi non perdo di generalità).

Scelgo la polarizzazione di E lungo z :

$$\vec{E} = E_{0z} \vec{e}_z e^{ik_x \cdot x - i\omega t}$$

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Cerco la relazione tra B ed E . Applico il rotore alla prima

$$\nabla \wedge \left[\vec{E}_0 e^{ik \cdot x - i\omega t} \right] = ik \wedge \vec{E}_0 e^{ik \cdot x - i\omega t}$$

$$\nabla \wedge \left[E_{0z} \vec{e}_z e^{ik \cdot x - i\omega t} \right] = -i E_{0z} k_x e^{ik \cdot x - i\omega t}$$

da qui si vede che B deve essere lungo y .

$$= -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{dove } B = B_{0y} e^{ik_x \cdot x - i\omega t}$$

$$i\omega B_{0y} = -ik_x E_{0z}$$

$$B_{0y} = -\frac{k}{\omega} E_{0z} = -\frac{E_{0z}}{c}$$

Le ampiezze di B ed E sono legate tra loro.

Prendendo le parti reali delle espressioni per E e B (per le onde piane nel vuoto)

$$E_{z0} \cos(\omega t - kx)$$

$$-B_{y0} \cos(\omega t - kx)$$

Perciò i due campi sono in fase.

Potenziali Ritardati:

L'informazione non può viaggiare più velocemente della velocità della luce, perciò le regole che legano i potenziali alle sorgenti devono tener conto del ritardo.

Considerando l'equazione di Poisson per l'elettrostatica

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

si vuole sfruttare il principio di sovrapposizione.

Per rappresentare le cariche puntiformi si usa la distribuzione δ di Dirac.

Considerando una gaussiana normalizzata

$$\frac{1}{L} e^{-\frac{x^2}{L^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L} e^{-x^2/L^2} dx = \text{costante}$$

Si vuole studiare il limite per $L \rightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{L} e^{-x^2/L^2} dx \sim f(x_0) \quad \text{nel limite per } L \rightarrow 0$$

dove si è usato $x_0 = 0$

$$\lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{L^2}} = \delta(x-x_0) \quad \text{delta di Dirac}$$

La delta ha la proprietà che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-x_0) dx = f(x_0)$$

Si può allora scrivere

$$f(x) = \int \delta(y-x) f(y) dy$$

Questa relazione lega la distribuzione di cariche puntiformi alle distribuzioni continue di carica.

Pisa 7 Marzo 2008

Potenziali Ritardati:

Costituiscono la soluzione dell'equazione d'onda in presenza di sorgenti.

Si farà uso del principio di sovrapposizione e dell'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \phi_{\text{tot}} = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

Il principio di sovrapposizione permette di risolvere quest'equazione a partire dalla soluzione della stessa equazione per una carica puntiforme

$$\nabla^2 \phi_{x_0} = -q \frac{\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\epsilon_0}$$

A parte un fattore $\sqrt{\pi}$

$$\lim_{L \rightarrow 0} \int_{-L}^{+L} f(x) \frac{1}{L} e^{-(x-x_0)^2/L^2} dx = f(x_0)$$

$$\int_a^b f(x) \delta(x-x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{se } x_0 \in (a,b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0)$$

Sfruttando le proprietà della Delta si ha

$$\rho(x) = \int d^3x_0 \delta(x-x_0) \rho(x_0)$$

Per il principio di sovrapposizione

$$\phi_{\text{tot}} = \int d^3x_0 \rho(x_0) \phi_{x_0}$$

$$\nabla^2 \phi_{\text{tot}} = \int d^3x_0 \rho(x_0) \nabla^2 \phi_{x_0}$$

$$= -\int d^3x_0 \rho(x_0) \frac{\delta(x-x_0)}{\epsilon_0} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

Tecnicamente ϕ_{x_0} è detto Funzionale di Green.

Vogliamo ora risolvere

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(x-x_0)$$

$$= -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(x) \quad \text{per } x_0 = 0$$

Quest'equazione è omogenea ovunque tranne che in x_0 .

Si considera una soluzione di tipo sferico ($\phi = \phi(r)$)

Le soluzioni dell'omogenea sono del tipo $\frac{1}{r}$ e costante.

Si devono ancora imporre le condizioni al bordo, e scegliendo

$$\phi \rightarrow 0 \text{ per } r \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} = 0$$

la costante si annulla.

Si ha allora

$$\phi(r) = \frac{A}{r} \quad \forall r \neq 0$$

Si può scrivere l'equazione come

$$\text{div}[\text{grad } \phi] = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(r)$$

Per determinare $\phi(0)$ integro su una sfera di raggio R .

e mando $R \rightarrow 0$.

$$\int_D \nabla^2 \phi \, d^3x = \int_{\partial D} (\nabla \cdot \phi) \cdot d\mathbf{s}$$

$$= - \int_{\partial D} \frac{A}{r^2} \, d\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = -4\pi R^2 \frac{A}{R^2} = -\frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow 4\pi A = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Cerco ora la soluzione dell'equazione d'onda per $\psi(x,t)$

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -S(x,t)$$

$$= -s(x,t) \delta(x-x_0)$$

Senza perdere di generalità posso $x_0 = 0$

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -s(t) \delta(x)$$

Cerco soluzioni a simmetria sferica ($\psi(x,t) = \psi(r,t)$) del tipo

$$\psi(r,t) = \frac{\psi_1(r-ct)}{r} + \frac{\psi_2(r+ct)}{r}$$

Nel caso di una sorgente monocromatica

$$\psi(r,t) = \frac{A_1}{r} e^{i(kr - \omega t)} + \frac{A_2}{r} e^{-i(kr - \omega t)}$$

Nel limite statico $\omega \rightarrow 0$ ($\omega = ck_r$)

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r} (A_1 + A_2) + B$$

La condizione che si impone per l'onda sferica è che l'onda sia uscente dalla sorgente.

Questa condizione è imposta dalla fisica del problema e dal principio di causalità.

$$\psi(r,t) = \frac{\psi_1(r-ct)}{r} + \frac{\psi_2(r+ct)}{r}$$

Integro ora l'equazione su un volumetto.

$$-s(t) = \int d^3x \left(\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right)$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \cancel{r^2} \frac{\psi''}{r} \quad \text{limitato}$$

$$\int \frac{\psi''}{r} r^2 dr \propto r^2 \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow 0$$

$$\nabla \psi_1 = \frac{\psi_1'}{r} - \frac{\psi_1}{r^2}$$

Il contributo del primo termine va a zero per $R \rightarrow 0$, quindi la condizione di raccordo è uguale a quella usata per l'equazione di Poisson.

$$\int_{\partial D} -\frac{\psi_1}{r^2} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{z}_r = -4\pi \psi_1(-ct) = -s(t)$$

$$4\pi \psi_1(-ct) = s(t)$$

Le correzioni tendono a 0 per $r \rightarrow 0$. Il limite dell'elettrostatica non è altro che il problema visto a distanze trascurabili rispetto a λ .

$$\psi(r,t) = \frac{1}{4\pi} \frac{s(t-r/c)}{r}$$

Soluzione per sorgente puntiforme all'origine.

Onde Tridimensionali:

La soluzione monocromatica a delle onde a tre dimensioni è

$$f(r,t) = \frac{A_1}{r} e^{-i(kr-\omega t)} + \frac{B_1}{r} e^{-i(kr+\omega t)}$$

$$= \frac{C_1}{r} \cos(kr-\omega t) + \frac{C_2}{r} \sin(kr-\omega t)$$

Nel limite per $r \rightarrow 0$ si trova un potenziale del tipo $\frac{1}{r}$ modulato nel tempo.

Nel limite $k \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$ (caso statico) si ottiene ancora un potenziale $\frac{1}{r}$ più una costante.

Il seno andrebbe a zero, ma sviluppando al prim'ordine si ottiene

$$C_2 k \frac{r}{r} = C_2 k = \text{costante}$$

che deve rimanere costante per $k \rightarrow 0$

Sarebbe meglio fare il limite per $kr \rightarrow 0$, che ha il significato fisico $r \ll \lambda$

calcolare sistematicamente delle onde vibranti in termini di sorgente $\forall t, r$

Sviluppo in Multipli dei Potenziali Ritardati:

Nel caso statico l'unica grandezza importante nello sviluppo era $\frac{d}{R} \gg 1$.

Adesso entra in gioco anche la lunghezza d'onda λ .

Abbiamo risolto l'equazione per una sorgente puntiforme

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = S(t, x)$$

$$\int S(t, x_0) \delta(x - x_0) dx_0 = S(t, x)$$

Per una carica puntiforme in $x_0 = 0$ si è ottenuta la soluzione

$$\psi(r,t) = \frac{1}{4\pi r} S(t - r/c, x_0)$$

Bisogna ora generalizzare a distribuzioni arbitrarie delle sorgenti. Si userà che $r = |\vec{x} - \vec{x}_0|$

Nella soluzione

$$\psi(x, t) = \frac{1}{4\pi r} \frac{S(x_0, t - r/c)}{r}$$

$(t - r/c)$ è detto tempo ritardato, ed esprime il ritardo tra l'istante di emissione del segnale e l'istante di ricezione alla distanza r .

La dipendenza del potenziale dallo spazio è nel termine $1/r$ e nel tempo ritardato. Questa doppia dipendenza modificherà la configurazione dei campi.

Generalizzando la soluzione

$$\psi(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{S(x', t - |x - x'|/c)}{|x - x'|}$$

In generale il tempo ritardato è diverso per ogni punto della sorgente.

L'espressione per il potenziale scalare è

$$\phi(x, t) = \int \frac{\rho(x', t - |x - x'|/c)}{4\pi \epsilon_0 |x - x'|} d^3x'$$

mentre per il potenziale vettore

$$A(x, t) = \int \frac{J(x', t - |x - x'|/c)}{4\pi \epsilon_0 c^2 |x - x'|} d^3x'$$

Per $\frac{R}{\lambda} \gg 1$ si può approssimare

$$\frac{1}{|x - x'|} \approx \frac{1}{|x|} = \frac{1}{R}$$

$$A(x, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \int J(x', t - |x - x'|/c) d^3x' + O\left(\frac{d}{R}\right) + O\left(\frac{d}{\lambda}\right)$$

Notare che al numeratore non abbiamo sostituito perché in generale termine di tempo ritardato dipenderà anche da λ (e quindi anche da ω)

Esaminando la sorgente frequenza per frequenza

$$J_\omega(x') \cos\left[\omega\left(t - \frac{|x - x'|}{c}\right)\right] d^3x'$$

Considerando $x' = (x', 0, 0)$ e sviluppando per $x' \ll r$

$$\begin{aligned} \cos\left[\omega\left(t - \frac{|x - x'|}{c}\right)\right] d^3x' &\approx \\ &\approx \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] d^3x' + \frac{\omega x'}{c} \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] d^3x' \end{aligned}$$

Il termine correttivo dipende $\frac{d}{\lambda}$

Se $d \ll \lambda$ si può usare un unico tempo di ritardo per l'intera sorgente, ma se $d \sim \lambda$ i segnali interferiscono.

Per $\frac{d}{\lambda} \ll 1$ e $\frac{R}{d} \gg 1$ trascuro il ritardo differenziale:

$$A(x, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \int J(x', t - R/c) d^3x'$$

dove stiamo supponendo che le disuguaglianze siano vere $\forall \omega$.
Questa espressione è detta approssimazione di dipolo.

Per calcolare l'integrale vogliamo sfruttare l'equazione di continuità, che contiene però $\nabla \cdot J$.

$$\begin{aligned} \partial_i (x'_i J_i) &= \delta_{ii} J_i + x'_i \text{div}(J) \\ \text{div}(Jx) &= \vec{J} + \vec{x}' \text{div}(\vec{J}) \end{aligned}$$

L'integrale diventa

$$\begin{aligned} A(x, t) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \int [\text{div}(Jx') - x' \text{div}(J)] d^3x' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \int d^3x' x' \frac{dp}{dt} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}(t - R/c) \end{aligned}$$

per calcolare d si usa il Gauge di Lorentz partendo da A

Dove si è fatto uso dell'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$$

e del fatto che $\text{div}(Jx')$ è un termine di flusso che si annulla scegliendo una superficie che racchiude la distribuzione di corrente e sulla quale non si hanno correnti libere. (una superficie un po' più grande della superficie della distribuzione)

Un tale $A(x, t)$ è detto potenziale di dipolo oscillante e $p(t - R/c)$ è proprio il momento di dipolo elettrico.

Calcolo dei Campi:

Derivando i campi dalle espressioni trovate per i potenziali si ottengono termini in $1/R^2$ e termini in $1/R\lambda$. Per $R \gg \lambda$ il secondo da il campo di radiazione. È essenziale che il campo di radiazione vada come R^{-1} perché così l'energia sarà $\sim R^2$ e nella propagazione di un'onda sferica la superficie va come R^2 e si ha dunque la conservazione.

Sappiamo che $B = \nabla \wedge A$, ed A è una funzione scalare per un vettore.

$$\nabla \wedge (f \vec{V}) = \nabla f \wedge V + f \nabla \wedge V$$

$$\nabla \frac{1}{R} = + \frac{\hat{e}_r}{R^2}$$

$$\frac{\hat{e}_r}{R^2} \wedge \dot{p} + \frac{1}{R} \nabla \wedge \dot{p}$$

Potenziali e Campi:



$R \gg d$ Trascurare i multipoli statici.

$$\frac{1}{R} \sim \frac{1}{R_0}$$

$$\frac{d}{\lambda} \ll 1$$

Il tempo ritardato è lo stesso su tutta la sorgente.

\Rightarrow Irraggiamento di dipolo.

Rimane da discutere il parametro $\frac{R}{\lambda}$.

$$\frac{R}{\lambda} \ll 1$$

campi vicini (o prossimi), campi statici

$$\frac{R}{\lambda} \gg 1$$

zona d'onda, campi di radiazione che vanno come R^{-1}

Nelle condizioni R/λ libero, $R > d$ e $d < \lambda$, $R = |\mathbf{x}|$, abbiamo trovato

$$A(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - R/c)}{R}$$

potenziale vettore in approssimazione di dipolo oscillante.

Vogliamo ora calcolare \mathbf{B} ed \mathbf{E} .

Per trovare \mathbf{B} ci basta l'espressione per A . Per trovare \mathbf{E} si può ricavare (con fatica) $\phi(\mathbf{x}, t)$, oppure sfruttare la gauge di Lorentz.

Poniamo per semplicità $\vec{\mathbf{p}} = p_z \hat{\mathbf{z}}$ e sfruttiamo $\mathbf{B} = \nabla \wedge A$

$$B_x = \partial_y A_z$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{R^{-2}} \dot{p}(t-R/c) - \frac{1}{Rc} \frac{\partial}{\partial y} \int_{R^{-1}} \ddot{p}(t-R/c) \right] \partial_y \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{y}{R^3}$$

Il primo addendo assomiglia alla legge di Biot-Savart calcolata però al tempo ritardato.

$$\int \frac{\mathbf{J} \wedge \vec{\mathbf{r}}}{r^3} d^3r$$

Il secondo termine dipende invece dall'accelerazione. Questo termine diventa dominante per "R grande".

Per $R/\lambda \ll 1$ si torna al caso statico (lentamente variabile).

Il primo termine domina ma devo tener conto del tempo ritardato. Posso approssimare all'ordine $(R/\lambda)^2$

$$B_x \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[-\frac{y}{R^3} \dot{p}(t) + \frac{y}{R^3} \frac{\dot{p}R}{c} - \frac{y}{cR^2} \dot{p}(t) \right]$$
$$\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[-\frac{y}{R^3} \dot{p}(t) \right]$$

L'espressione generale per il campo magnetico è

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\left[\dot{p} + \left(\frac{R}{c}\right) \ddot{p} \right]_{t-R/c} \wedge R}{R^3}$$

Il campo di radiazione ($R \gg \lambda$)

$$B_{\text{rad}} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{R^2} \left(\ddot{p} \Big|_{t-R/c} \wedge R \right)$$

Usando la gauge di Lorentz si ottiene l'espressione per ϕ

$$\phi(x,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} R \cdot \frac{\left[p + \frac{R}{c} \dot{p} \right]_{t-R/c}}{R^2}$$

poniamo $p^* = p(t-R/c) + \frac{R}{c} \dot{p}(t-R/c)$. L'espressione per il campo elettrico

$$E(x,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[p^* - \frac{3(p^* \cdot R)}{R^2} R \right] - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{c^2} \left(\ddot{p}(t-R/c) \wedge R \right) \wedge R \right]$$

campo statico campo di radiazione
 $\frac{1}{R^3}$

Sia E che B sono ortogonali al vettore

$n = \vec{R}/R$. Inoltre $E \perp B$ e $|E| = c|B|$

Teorema dell'energia:

Consideriamo i campi di radiazione nell'approssimazione $R \gg \lambda$

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\ddot{p}_{\text{tr}} \wedge \vec{R}}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\ddot{p}_{\text{tr}} \wedge \vec{e}_R}{R}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{\dot{p}_{\text{tr}} \wedge \vec{R}}{R^3} \right] \wedge R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{\dot{p}_{\text{tr}} \wedge \vec{e}_R}{R} \right] \wedge \vec{e}_R$$

L'andamento è R^{-1} (campo di radiazione). I campi sono ortogonali tra loro e tangenti alla superficie sferica centrata nel dipolo oscillante.

I campi sono massimi, dato un dipolo orientato lungo \hat{z} , all'equatore e nulli ai poli.

Prendiamo un dipolo oscillante e calcoliamos il tempo ritardato

$$p = p_0 \cos(\omega t)$$

$$p_{\text{tr}} = p_0 \cos[\omega(t - R/c)]$$

Derivando due volte rispetto al tempo

$$\ddot{p}_{\text{tr}} = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t - kR) \quad \frac{\omega}{c} = k$$

Sostituendo questo risultato nelle espressioni per B ed E viene esplicitata la natura ondulatoria dei campi

Tutte queste formule valgono per particelle che oscillano a velocità minore della velocità della luce.

Notiamo che l'energia è quadratica nei campi,

perciò l'andamento R^{-1} porta a un'energia che va come R^{-2} e bilancia l'elemento di superficie sferica.

Per formulare un teorema dell'energia serve un'equazione di continuità del tipo

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{densità di energia}) + \nabla \cdot (\text{flusso}) = \text{Sorgente (densità di potenza)}$$

↑
vettore di Poynting

- E · J

Si parte dalle eq. di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$$

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \wedge \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}$$

Moltiplico l'ultima per $-\mathbf{E}$

$$-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\mathbf{E}^2}{2} \right) - \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{B}$$

L'ultimo termine è

$$-\epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{B} = \epsilon_0 c^2 [\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \nabla \wedge \mathbf{E}]$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \epsilon_{ijk} \partial_i (E_j B_k)$$

$$= B_k \epsilon_{ijk} \partial_i E_j + E_j \epsilon_{ijk} \partial_i B_k$$

$$= \mathbf{B} \cdot \nabla \wedge \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{B}$$

$$-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\mathbf{E}^2}{2} \right) + \epsilon_0 c^2 [\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \nabla \wedge \mathbf{E}]$$

$$-\mathbf{B} \cdot \nabla \wedge \mathbf{E} = \mathbf{B} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

$$-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\mathbf{E}^2}{2} + \epsilon_0 c^2 \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) + \epsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})$$

Segue il teorema di Poynting di conservazione dell'energia

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\mathbf{E}^2}{2} + \frac{1}{\mu_0} \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \right) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

$\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}$ è detto vettore di Poynting

Il teorema di Poynting è ben definito se note le condizioni al bordo a causa dell'ambiguità della densità di energia.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\mathbf{E}^2}{2} + \frac{1}{\mu_0} \frac{\mathbf{B}^2}{2} + \nabla \cdot \mathbf{S} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

è del tutto equivalente alla scrittura precedente.

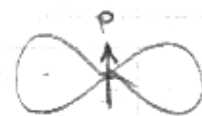
dimostrare che ρ_{eff} e $\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2}$ differiscono per una divergenza

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \epsilon_0 c^2 = \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{R^2} [(\ddot{\mathbf{p}} \wedge \mathbf{e}_R) \wedge \mathbf{e}_R] \wedge (\ddot{\mathbf{p}} \wedge \mathbf{e}_R)$$

$$\begin{aligned} ([\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}] \wedge \mathbf{A})_i &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} A_l B_m A_k = (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) A_l B_m A_k \\ &= A^2 B - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} \end{aligned}$$

Il secondo termine si cancella nel nostro caso.

$$(\ddot{\mathbf{p}} \wedge \mathbf{e}_R)^2 e_R = |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta e_R \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 R^2}$$



distribuzione angolare del flusso di energia

Integrando la densità di potenza così ottenuta sulla sfera si ottiene la potenza

$$\langle W \rangle = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} \quad \text{mediata sul periodo}$$

che va con ω^4 .

La potenza irradiata non è additiva. Date due particelle che irradiano, a meno di costanti il vettore di Poynting sarà

$$\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{B}_1 + \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{B}_2 + \mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{B}_2 + \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{B}_1 \neq \mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{B}_1 + \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{B}_2$$

Dati campi che oscillano come $\cos(\omega t)$, si ha che il vettore di Poynting va come $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t))$.

Esso è perciò costituito da una componente costante e da una che oscilla ma che mediata sul periodo si annulla.

In un'onda polarizzata circolarmente ($\mathbf{E} \sim \sin(\omega t)$ e $\mathbf{B} \sim \cos(\omega t)$) il vettore di Poynting ha solo la parte costante.
 Prendere onda piana e calcolare Poynting

Controllo dimensionale della Potenza

$$W = \frac{E}{T} = \frac{e^2 b^2}{T^4} = \frac{e^2}{\epsilon_0 L} \frac{L^2 L}{T^4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{L^3}{T^4} \frac{1}{C^3} \quad \Rightarrow W \approx \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{\epsilon_0 C^3}$$

- Vettore di Poynting di un filo percorso da corrente
- di una carica in un solenoide

Elettrone investito da un'onda EM.

Scrivendo l'equazione del moto

$$m_e \ddot{x} = -e \left[E e^{-i\omega t + ik \cdot x} + \dot{x} \wedge B e^{-i\omega t + ik \cdot x} \right]$$

Questa è un'equazione non lineare almeno che l'onda non sia molto debole, in modo da poter globalmente trascurare il secondo termine e $-E e^{ikx}$.

Teorema di Conservazione della densità di Energia:

Ci ha portato a definire il vettore di Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$$

Si è vista la distribuzione dell'energia irradiata da un dipolo oscillante, che va come $\sin^2\theta$.

Ci sono due componenti, dal vettore di Poynting, una di frequenza $\omega - \omega = 0$ e una oscillante di frequenza $\omega + \omega = 2\omega$.

Quello che ci interessa è comunque la media temporale di \mathbf{S} .

Integrando su una superficie sferica centrata nel dipolo si ha la potenza irradiata.

Calcolando la potenza irradiata non nella zona dei campi di radiazione ma in zona dei campi prossimi si deve ottenere lo stesso risultato (conservazione dell'energia), ma i conti sono molto più rognosi.

Per quanto già visto, la densità di energia non è ben definita, ma lo è l'energia totale.

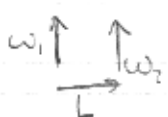
Si ha la relazione

$$\frac{E^2}{2} = \frac{\rho\phi}{2\epsilon_0} - \nabla \cdot (\mathbf{E}\phi)$$

Per un'onda piana il vettore di Poynting assume la forma

$$\mathbf{S} = \frac{\epsilon_0 c E^2}{2}$$

Consideriamo due dipoli che oscillano a frequenze diverse.



La potenza irradiata non è in generale la somma delle potenze irradiate dai singoli dipoli.

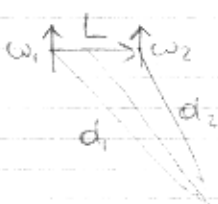
$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \wedge (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)$$

Compiono due termini a frequenza 0 (potenze indipendenti), altri due a frequenza $2\omega_1$ e $2\omega_2$, che scompaiono mediati sul periodo.

Eli ultimi due termini sono a frequenza $\omega_1 + \omega_2$ e $\omega_1 - \omega_2$

Per tempi lunghi il primo scompare mediamente nel tempo, ma

il secondo scompare solo per $t \gg \frac{1}{\omega_1 - \omega_2}$



Se $d \ll \lambda$

è come che si vedesse solo un dipolo sommo perché i tempi di ritardo sono circa uguali.

$\uparrow A_x$ $A_x \cos(\omega t)$ Al variare della fase si hanno
 $\rightarrow A_y$ $A_y \cos(\omega t + \phi)$ comportamenti diversi.

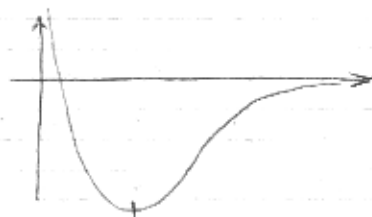
Elettrone legato investito da un'onda:

Consideriamo per esempio un elettrone in un atomo di idrogeno.

Prendiamo un sistema unidimensionale per semplicità.

$$m\ddot{x} + \nu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Si usa l'approssimazione di piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile.



Siamo in approssimazione di campi deboli rispetto

al campo dell'atomo, perché bisogna avere che lo scostamento dell'elettrone dalla posizione di equilibrio sia piccolo rispetto alle dimensioni atomiche.

Aggiungendo un termine correttivo in $x - \epsilon x^3$ e una forzante $F(t)$ alla frequenza ω , si ottiene anche una risposta in 3ω . Il sistema non è più lineare.

Forzando il sistema con un'onda em.

$$m(\ddot{\vec{x}} + \nu\dot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x}) = -e[\vec{E}_0 + \dot{\vec{x}} \wedge \vec{B}_0] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}$$

Consideriamo la condizione di moto libero con

$$\vec{k} = k_z \quad e \quad \vec{E} = E_y$$

Per moto libero si intende $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ ($\omega_0 \rightarrow 0$)

Se posso considerare $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \text{costante}$

$$m\ddot{y} = -e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} \hat{e}_y$$

$$|y| = \frac{eE_0}{m_e\omega}$$

Per poter linearizzare le termine di forzante (approssimazione di campi deboli) deve essere

$$\frac{eE_0}{m_e \omega} \ll c \quad \frac{eE_0}{mc} \ll \omega$$

La seconda è una sorta di frequenza di ciclotrone nel campo dell'onda.

In questa approssimazione posso trascurare la forza di Lorentz (termine $-e\dot{\vec{x}} \wedge \vec{B}_0$ e $e\dot{\vec{x}} \cdot \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$)

Quando questa condizione non è verificata, normalmente l'atomo è già ionizzato.

Se $\frac{eE_0}{mc} \sim \omega$, nel sistema di riferimento solidale al moto medio dell'elettrone lungo x si ha un'orbita a 8

Linearizzando si ha

$$m(\ddot{\vec{x}} + \gamma\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x}) = -e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

La soluzione a regime è della forma $\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$

con
$$\vec{x}_0 = -\frac{e\vec{E}_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

dimostrare che $A^2 = AA^*$

Per calcolare la potenza serve \ddot{p}

$$\ddot{p} = \partial_t^2 (-ex_0) = |e x_0 \omega^2|$$

$$W = \frac{|p_0|^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{e^4 E_0^2}{m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \frac{1}{12\pi \epsilon_0 c^3} \quad (\gamma=0)$$

W è una quantità quadratica, quindi non si può usare la notazione complessa a cuor leggero.

Si vuole ora normalizzare la potenza irradiata al flusso incidente. Questo definisce la sezione d'urto.

$$W = \frac{e^4 E_0^2}{m^2} \frac{1}{12\pi \epsilon_0 c^3} F(\omega/\omega_0)$$

divido per il flusso incidente dell'onda piana $S = \frac{\epsilon_0 c E^2}{2}$

Si ottiene

$$\frac{2W}{\epsilon_0 c \epsilon_0^2} = \frac{e^4}{\epsilon^2 m^2 c^4} \frac{1}{6\pi} F(\omega/\omega_0)$$

$$\frac{e^4}{\epsilon_0^2 (mc^2)^2} = r_e^2 \quad \text{raggio}^2 \text{ classico dell'elettrone } (\sim 10^{-13} \text{ cm})$$

sezione d'urto

$$\frac{e^2}{\epsilon^2 r_e^2} \sim mc^2 \quad \text{a meno di fattori numerici}$$

Perché il cielo è blu?

Il cielo è fatto di atomi discreti che irraggiano incoerentemente e dunque diffonde la luce del sole. Se il cielo fosse un mezzo continuo il cielo sarebbe nero.

Il cielo è blu per via della $F(\omega/\omega_0)$.

Le frequenze più alte (come blu e violetto) tendono a diffondere di più.

Le frequenze più basse vengono diffuse di meno (p.es. il rosso).

Nel conto fatto per calcolare l'energia irraggiata dall'elettrone investito dall'onda piana abbiamo violato la conservazione dell'energia, perché abbiamo trascurato il contributo dei campi di radiazione al vettore di Poynting.

Pisa 10 Aprile 2008

Irraggiamento e sezioni d'urto:

Abbiamo trovato la sezione d'urto, corrispondente al raggio classico dell'elettrone.

$$\sigma \approx r_0^2 \approx \frac{e^4}{\epsilon_0^2 m^2 c^4}$$

Abbiamo visto che la diffusione della luce è dovuta alla natura discreta della materia (irraggiamento incoerente).

Ipotizzando di dividere gli atomi mantenendone le proprietà

$$n \rightarrow qn$$

$$m \rightarrow m/q$$

$$e \rightarrow e/q$$

$$n\sigma = \frac{ne^4}{\epsilon_0^2 m^2 c^4} \rightarrow \frac{qn(e/q)^4}{\epsilon_0^2 (m/q)^2 c^4} \propto \frac{1}{q}$$

In questo caso, per $q \rightarrow \infty$ (limite del continuo), scompare l'effetto di diffusione (il cielo è nero).

Rimarrebbe però un indice di rifrazione.

La diffusione dipende dalle fluttuazioni termiche.

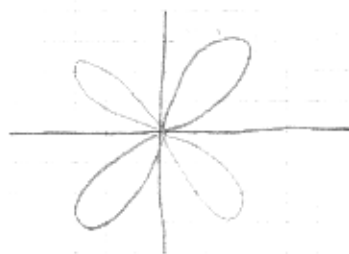
Potenziali Ritardati con correzioni:

Tengo le correzioni in d/λ , il tempo ritardato non è uniforme nella sorgente.

Per $\frac{d}{\lambda} \gg 1$, considerando due dipoli che oscillano in controfase, il dipolo totale è nullo e non vedo campi di radiazione.

Se però $\frac{d}{\lambda} \ll 1$, per esempio i due elettroni di un atomo di elio, schematizzabili come due dipoli in controfase, non è trascurabile il ritardo differenziale

Sul piano equatoriale i campi di radiazione si elidono perché il ritardo dei due dipoli è lo stesso. So anche che i campi di dipolo si annullano sull'asse polare.



Devo sviluppare in potenze di d/λ . Ci sarà dunque una dipendenza da ω , che sarà ω^2 e ω^4 sui campi e ω^4 e ω^6 sulle potenze, per i termini di dipolo e quadrupolo. Stiamo andando a calcolare le correzioni quadrupolari ai campi e alla potenza.

In generale, il vettore di Poynting sarà

$$S \propto (E_d + E_q) \wedge (E_d + E_q) \quad \begin{array}{l} \text{dipolo} \\ \text{quadrupolo} \end{array}$$

La interferenza totale avrà però media nulla, perciò nel calcolo della potenza totale posso sommare $S_d + S_q$.

$$d \sim \frac{v}{\omega}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \sim \frac{c}{\omega}$$

Dobbiamo stare nell'approssimazione $d/\lambda \ll 1$, perciò consideriamo particelle che oscillano con velocità non relativistiche. Inoltre $R \gg \lambda$

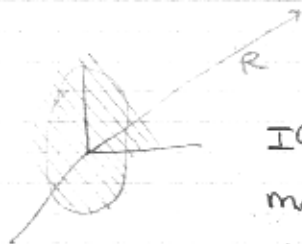
$$\vec{A} \propto \int \frac{d^3x' J(x', t_{\text{rit}})}{|x-x'|} \quad \text{con } t_{\text{rit}} = t - \frac{|x-x'|}{c}$$

$$\propto \frac{1}{R} \int d^3x' J(x', t_{\text{rit}})$$

Svilupperemo il tempo ritardato

$$J(x', t_{\text{rit}}(x')) = J(x', t_{\text{rit}}(x'=0)) + \frac{\partial J}{\partial t_{\text{rit}}} \left(\frac{R \cdot x'}{cR} \right) + o(\dots)$$

\uparrow radiazione di dipolo \uparrow ritardo differenziale



Il primo termine considera la distanza a meno di termini quadratici, che è come affettare la sorgente e considerare un solo tempo per ogni fetta.

$$A \propto \frac{1}{R} \int J(x', t_{\text{rit}}(x'=0)) d^3x' + \frac{1}{R} \frac{\vec{R}}{cR} \cdot \int x' \frac{\partial J}{\partial t_{\text{rit}}} d^3x'$$

Per calcolare il secondo integrale ho bisogno di una nuova identità. Indico con $J' = \frac{\partial J}{\partial t_{\text{rit}}}$

Cerchiamo l'identità utile nella forma

$$\partial_k (x_i' x_j' J_k') = \delta_{ik} x_j' J_k' + \delta_{jk} x_i' J_k' + x_i' x_j' \frac{\partial}{\partial t} \partial_k J_k$$

uso l'eq. di continuità

$$= \delta_{ik} x_j' J_k' + \delta_{jk} x_i' J_k' - x_i' x_j' \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

Bisogna calcolare

$$\int x_j' J_i' d^3x' = \frac{1}{2} \int (x_j' J_i' + x_i' J_j') d^3x' + \frac{1}{2} \int (x_j' J_i' - x_i' J_j') d^3x'$$

dove abbiamo separato parte simmetrica e parte antisimmetrica.

Calcolo la parte simmetrica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int x_j' J_i' + x_i' J_j' d^3x' &= \frac{1}{2} \int d^3x' x_i' x_j' \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int d^3x' x_i' x_j' \rho(x', t) \end{aligned}$$

C'era un R_j a moltiplicare le tutto, perciò

$$= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left[R_j Q_{ij} + \frac{1}{6} R_i \int r'^2 \rho(x', t) d^3x' \right]$$

dove

$$Q_{ji} = \int d^3x' \left[x_i' x_j' - \frac{1}{3} (r')^2 \delta_{ij} \right] \rho(x', t)$$

Nel calcolo dei campi, $R \cdot \ddot{Q}$ prende il posto di \dot{p} , e viene perciò un $(R \cdot \ddot{Q}) \wedge R$, che è come previsto la distribuzione a lobi.

Il termine $\frac{1}{6} \dots$ va invece a zero.

Caso pratico dell'irraggiamento di quadrupolo è l'irraggiamento di frenamento in un urto tra due elettroni.

Bisogna ancora discutere il termine antisimmetrico.

Questo porta all'irraggiamento di dipolo magnetico.

$$\frac{1}{2} R_j \int x_j' J_i' - x_i' J_j' d^3x' = -\frac{1}{2} R \uparrow \frac{d}{dt} \int d^3x' (x' \wedge J) \uparrow \text{dipolo magnetico}$$

?

Potenziali di Liénard-Wiechert:

Servono a calcolare i potenziali di una particella che si muove di moto arbitrario.

Consideriamo una particella discreta

$$\rho = q \delta(x')$$

$$\rho(x', t_{rit}) = q(\cdot)$$

Se ho una legge oraria data $X(t)$

$$\rho(x', t_{rit}) = q \delta(x' - X(t_{rit}))$$

$$= q \delta(x' - X(t - |x' - x|/c))$$

Potenziali di Lienard Wieckert:

Consideriamo una particella che si muove con legge oraria data $X(t)$. Vogliamo misurare i potenziali al punto x . Sia x' l'argomento della distribuzione di carica $\rho(x', t)$, che prendiamo della forma di una delta di Dirac perché consideriamo particelle puntiformi.

Per velocità della particella che approssima c diventa complicato stabilire il tempo ritardato.

In generale si hanno dei potenziali in funzione del tempo ritardato. In alcuni casi (moto rettilineo uniforme) si possono scrivere i potenziali in funzione del tempo della particella.

Una volta introdotta la relatività si ricalcolerà il potenziale nel sistema tangente alla particella, e si vedrà che poi trasformando si otterrà lo stesso risultato dei potenziali di LW.

Abbiamo

$$\rho(x', t) = q \delta(x' - X(t_{\text{rit}}))$$

In generale non abbiamo a che fare con una $\delta(x')$ ma con $\delta(g(x'))$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \delta(g(y))$$

Supponiamo che $g(y)$ abbia un solo zero, altrimenti bisogna spezzare il dominio e considerare gli zeri individualmente. Cambio variabile

$$\int_{g(-\infty)}^{g(+\infty)} \frac{dy}{dg} dg \delta(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(g) \frac{dy}{|g'|} = \frac{1}{|g'|} \Big|_{g(y)=0}$$

Con più zeri si otterrà $\sum \frac{1}{|g'(y_i)|} \Big|_{g(y)=0}$

A tre dimensioni compare lo Jacobiano.

$$\int d^3x' \delta(x' - g_x(x', y', z')) \delta(y' - g_y(x', y', z')) \delta(z' - g_z(x', y', z'))$$

La derivazione fisica del Feynman calcola lo Jacobiano con ragionamenti fisici.

Ad ogni t mi metto in un riferimento tale che la velocità della particella è diretta lungo uno degli assi (p.es. \hat{x}). Così devo considerare una sola delta perché le altre due sono sempre 1.

Fisso l'asse \hat{x} lungo la velocità istantanea al tempo ritardato. Posso usare la formula in cui compare $(g')^{-1}$:

$$g(x') = x' - X(t - |x - x'|/c)$$

$$g'(x') = 1 - \frac{v \cdot \hat{n}}{c}$$

dove \hat{n} è il vettore che punta dalla posizione della particella al tempo ritardato verso l'osservatore.

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', t_{\text{rit}})}{|x - x'|} d^3x' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \cdot \hat{n}} \right]_{t_{\text{rit}}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R - \frac{v}{c} \cdot R} \right]_{t_{\text{rit}}} \end{aligned}$$

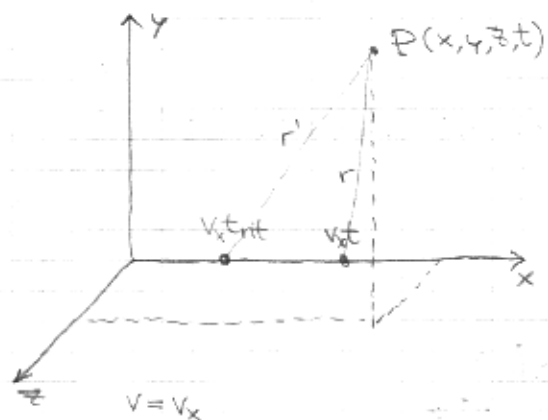
$$A = v\phi$$

Il fattore di correzione e il fatto di dover calcolare il tutto al tempo ritardato sono effetti della finitudine della velocità della luce.

Nei mezzi è possibile che la particella si muova a velocità superiori alla velocità della luce nel mezzo. Si ha allora che più tempi ritardati contribuiscono ai potenziali in un certo punto (p.es. radiazione Čerenkov).

Voglio ora calcolare ϕ per una particella che si muove di moto rettilineo uniforme.

Dato che $v = \text{cost}$ posso sostituire t a t_{rit}



Bisogna esprimere r' in funzione di r e $r' \cdot \hat{x}$ in funzione di $r \cdot \hat{x}$.

Le variabili primarie sono calcolate al tempo ritardato.

$$t' = t - \frac{r'}{c}$$

$$r' = \left[(x - vt')^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}$$

Cerco $r' = r'(r, t)$. Quadrando si ottiene $t' = t'(t, r)$

$$c^2 (t - t')^2 = (x - vt')^2 + y^2 + z^2$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t' = t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c} \sqrt{(x - vt')^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}$$

Invertendo si ottiene $r' = r'(t, x, y, z)$

$$(v \cdot r)_{\text{rit}} = v(x - vt')$$

Alla fine dei conti si ottiene

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r - \frac{v \cdot r}{c}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\left[\frac{(x - vt')^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 + z^2\right]^{1/2}}$$